

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2019.02.007

一类广义 Fisher 方程的稳定性和动态分枝

张强, 曾艳, 周艳红

(中国民用航空飞行学院 计算机学院, 广汉 618307)

摘要: 本文研究了一类广义 Fisher 方程的动态分枝和解的稳定性. 利用中心流形约化方法和吸引子分枝理论, 本文得到了动态分枝的完整判据、类型以及性质, 给出了吸引域的某些刻画, 从而补充完善了已有结果. 数值模拟验证了理论分析的正确性.

关键词: Fisher 方程; 动态分枝; 中心流形约化; 吸引子分枝

中图分类号: O175.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2019)02-0222-05

Stability and dynamical bifurcation of a generalized Fisher equation

ZHANG Qiang, ZENG Yan, ZHOU Yan-hong

(College of Computer Science, Civil Aviation Flight University of China, Guanghan 618307, China)

Abstract: This research studies the dynamic bifurcation and stability of solutions for a generalized Fisher equation. The complete criterion, type and property of dynamical bifurcation are obtained by center manifold reduction method and attractor bifurcation theory. Some characterizations of the basins of the attractors are given. These results improve the known results. Numerical simulations are provided to verify the theoretical analysis.

Keywords: Fisher equation; Dynamical bifurcation; Center manifold reduction; Attractor bifurcation (2010 MSC 35B32, 35B35, 35B40)

1 引言

本文考虑如下广义 Fisher 方程的动态分枝和解的稳定性问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(u), & x \in \Omega, t \in (0, \infty), \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 $d > 0$ 是反应扩散系数, $\Omega = (0, \pi)^n$ ($n = 1, 2, 3$), $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是非线性函数, 满足

(A₁) 存在 $a > 0$, 使得 $f(0) = f(a) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(a) < 0$;

(A₂) $0 < f(s) \leq f'(0)s$, $s \in (0, a)$, 且 $f(s)$ 在 $s = 0$ 处有泰勒展开;

(A₃) $f(s) = a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + o(|s|^3)$, 这里 $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{1}{2}f''(0)$, $a_3 = \frac{1}{6}f'''(0)$.

当 $f(s) = a_1s - a_1s^2$ 时, 方程(1)即为经典的 Fisher 方程, 是描述优势基因的传播^[1]、种群遗传^[2]以及化学反应^[3]等的重要模型.

几十年来, 对 Fisher 方程解的存在性和渐近行为已有大量研究^[4-10], 而关于该方程的动态分枝的研究则很少. 动态分枝是动力系统研究的重要方向, 其分析结果被广泛应用于解释各种物理现象^[11-15]. 本文取 a_1 作为系统(1)的控制参数, 利用中心流形约化方法和吸引子分枝理论^[16]得到了系统(1)产生动态分枝的完整判据、类型以及性质. 这里需要说明的是, 文献[16]虽然证明了吸引子吸

引域的存在性,但没有给出吸引域刻画. 本文则找到了吸引域的一个子集,一定程度上给出了吸引域的刻画,从而补充完善了文献[16]的结果. 数值模拟验证了理论分析的正确性.

2 主要结果

本文中对空间和算子做如下定义. 令

$$H = L^2(\Omega),$$

$$H_1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

定义 $L = A + B: H_1 \rightarrow H$ 如下

$$\begin{cases} Au = d\Delta u, \\ Bu = a_1 u. \end{cases}$$

定义 $G: H_1 \rightarrow H$ 为 $Gu = f(u) - a_1 u$. 因此,系统(1)可以写为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Lu + G(u), \\ u(x, 0) = \psi \end{cases} \quad (2)$$

根据文献[4~6],在条件(A₁)(A₂)下系统(1)的解存在唯一. 由文献[8,17],系统(1)定义了一个算子半群 $S(t): H \rightarrow H$,且 $S(t)$ 满足 $S(t)\psi = u(\cdot, t)$.

绝大多数的 Fisher 方程可以分为两类:(i) $a_2 \neq 0$; (ii) $a_2 = 0, a_3 \neq 0$. 这两种情况会导致完全不同的分枝类型和性质,应分别讨论. 本文首先在 $a_2 \neq 0$ 的情况下讨论了系统(1)的动态分枝和解的稳定性问题,得到以下定理.

定理 2.1 假设(A₁)~(A₃)成立. 则当 $a_2 \neq 0$ 时系统(1)在 $(u, a_1) = (0, nd)$ 处发生跨临界分枝,并且

(i) 当 $a_1 < nd$ 时, $u = 0$ 是局部渐近稳定的;

(ii) 分枝解表达式为

$$v^* = -\left(\frac{3\pi}{8}\right)^n \frac{a_1 - nd}{a_2} \prod_{i=1}^n \sin x_i + o(|a_1 - nd|);$$

(iii) 当 $a_1 < nd$ 时 v^* 是鞍点;

(iv) 存在 $\epsilon > 0$ 及 $u = 0$ 的邻域 D ,使得当 $nd < a_1 < nd + \epsilon$ 时, D 能够被稳定流形 Γ 分解为两个开集 D_1 和 D_2 , 并且

$$D = D_1 \cup \Gamma \cup D_2, v^* \in D_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \psi) - v^*\|_H = 0, \forall \psi \in D_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \psi)\|_H > \delta, \forall \psi \in D_2,$$

这里 $u(t, \psi)$ 是系统(1)的解, $\delta > 0$ 是某个常数;

(v) 在 $\|\psi\|_H$ 充分小的条件下, 如果 $a_2 < \langle \psi, e_{k_0} \rangle_H < 0$, 那么 $\psi \in D_1$, 其中

$$e_{k_0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sin x_i.$$

证明 第一步,作特征值和特征函数分析,找到控制参数 a_1 的临界值. 考虑如下特征值问题

$$Lu = \beta u.$$

容易得出其特征值和单位化的特征函数分别为

$$\begin{cases} \beta_k(a_1) = a_1 - d \sum_{i=1}^n k_i^2, \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n), \\ e_k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sin k_i x_i. \end{cases}$$

易见,控制参数 a_1 的临界值为 nd , 特征值满足

$$\beta_k(a_1) \begin{cases} < 0, a_1 < nd, \\ = 0, a_1 = nd, \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 = (1, \dots, 1) \\ > 0, a_1 > nd. \end{cases} \quad (3)$$

且存在 $\epsilon > 0$,使得当 $nd \leq a_1 < nd + \epsilon$ 时

$$\beta_k(a_1) < 0, \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0 \quad (4)$$

第二步,对系统作中心流形约化,并讨论动态分枝类型和性质. 令

$$u = y + H(y) \quad (5)$$

这里 $y = y_1 e_{k_0} = y_1 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sin x_i$, $H(y)$ 是中心流形函数,满足

$$H(y) = o(\|y\|_H) \quad (6)$$

将(5)式代入系统(1),等式左右两边同乘以 e_{k_0} 再在 Ω 上积分,得到中心流形上的约化方程为

$$\frac{dy_1}{dt} = (a_1 - nd)y_1 + a_2 \left(\frac{8\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{\pi}}\right)^n y_1^2 + o(|y_1|^2) \quad (7)$$

容易看出,当 $a_1 < nd$ 时, $y_1 = 0$ 是局部渐近稳定的. 结合条件(3)~(6)式, $u = 0$ 是局部渐近稳定的,结论(1)成立. 另外,从(7)式可以解得在 $(y_1, a_1) = (0, nd)$ 附近的分枝解为

$$y_1^* = -\left(\frac{3\pi\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}\right)^n \frac{a_1 - nd}{a_2} + o(|a_1 - nd|) \quad (8)$$

由(5)(6)(8)式可得系统(1)的分枝解的表达式为

$$v^* = -\left(\frac{3\pi}{8}\right)^n \frac{a_1 - nd}{a_2} \prod_{i=1}^n \sin x_i + o(|a_1 - nd|).$$

结论(ii)成立. v^* 的表达式意味着系统(1)在 $(u, a_1) = (0, nd)$ 附近发生跨临界分枝.

由文献[16]中定理 6.5 可得结论(iii),(iv).

最后证明结论(v). 在 $\|\psi\|_H$ 充分小的条件下,我们只需证明 $a_2 < 0, \langle \psi, e_1 \rangle_H > 0$ 的情形,对于另一种情形 $a_2 > 0, \langle \psi, e_1 \rangle_H < 0$ 同理可得.

当 $nd < a_1 < nd + \epsilon$ 时,考虑中心流形上约化

方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = (a_1 - nd)y_1 + a_2 \left(\frac{8\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{\pi}}\right)^n y_1^2 + \\ o(|y_1|^2), \\ y_1(0) = y_0 \end{cases} \quad (9)$$

其中 $y_0 = \langle \psi, e_1 \rangle_H$. 显然, $y_0 \in V_1 = \{v \mid v > 0, |v| < \varepsilon_0\}$. 由于 y_1^* 是系统(9)在集合 V_1 中唯一一个平衡点且局部渐近稳定, 因此系统(9)的解 $y_1(t, y_0)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t, y_0) - y_1^*| = 0.$$

由(5)式有

$$\begin{aligned} u(t, \psi) &= y_1(t, y_0) + H[y_1(t, y_0)], \\ v^* &= y_1^* + H(y_1^*) \end{aligned} \quad (10)$$

再根据(4)(6)(10)式和中心流形定理^[16]得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \psi) - v^*\|_H = 0.$$

所以 $\psi \in D_1$. 证毕.

注 1 对于 $a_2 = 0, a_3 = 0, \dots, a_k = 0, a_{k+1} \neq 0, k \geq 3$, 并且 k 是奇数, 用相同的方法和步骤可以得到与定理相类似的结论.

接着, 我们在 $a_2 = 0, a_3 \neq 0$ 的情况下讨论系统(1)的动态分歧和解的稳定性问题.

定理 2.2 假设(A₁)~(A₃)成立. 则当 $a_2 = 0, a_3 \neq 0$ 时系统(1)在 $(u, a_1) = (0, nd)$ 处发生叉式分歧, 并且

(i) 当 $a_1 < nd$ 或者 $a_1 = nd, a_3 < 0$ 时, $u = 0$ 是局部渐近稳定的;

(ii) 分歧解的表达式为

$$\begin{aligned} v_1^* &= \sqrt{-\frac{4^n}{3^n a_3} (a_1 - nd)} \prod_{i=1}^n \sin x_i + \\ & o(|a_1 - nd|^{\frac{1}{2}}), \\ v_2^* &= -\sqrt{-\frac{4^n}{3^n a_3} (a_1 - nd)} \prod_{i=1}^n \sin x_i + \\ & o(|a_1 - nd|^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

(iii) 当 $a_3 > 0$ 时, 叉式分歧是次临界分歧, 且 v_1^* 和 v_2^* 是系统(1)分歧出的两个鞍点;

(iv) 当 $a_3 < 0$ 时, 叉式分歧是超临界分歧, 且 v_1^* 和 v_2^* 是系统(1)分歧出的两个稳定的结点;

(v) 当 $a_3 < 0$ 时, 存在 $\varepsilon > 0$ 以及 $u = 0$ 的邻域 O , 使得当 $nd < a_1 < nd + \varepsilon$ 时, O 能够被稳定流形 Υ 分解为两个开集 O_1 和 $O_2, O = O_1 \cup \Upsilon \cup O_2, v_i^* \in O_i, i = 1, 2$, 并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \psi) - v_i^*\|_H = 0, \forall \psi \in O_i,$$

其中 $u(t, \psi)$ 是系统(1)的解;

(vi) 在 $a_3 < 0, \|\psi\|_H$ 充分小的条件下, 如果 $\langle \psi, e_{k_0} \rangle_H > 0$, 那么 $\psi \in O_1$; 否则 $\psi \in O_2$, 这里

$$e_{k_0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sin x_i.$$

证明 采用与定理 2.1 的证明中的第一、二步相同的方法, 我们可得到如下的中心流形约化方程

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= (a_1 - nd)y_1 + a_3 \left(\frac{3}{2\pi}\right)^n y_1^3 + \\ & o(|y_1|^3) \end{aligned} \quad (11)$$

容易看出, 当 $a_1 < nd$ 或者 $a_1 = nd, a_3 < 0$ 时, $y_1 = 0$ 是局部渐近稳定的. 结合条件(3)~(6)式, $u = 0$ 是局部渐近稳定的, 结论(i)成立. 另外, 注意到在下面任何一种情形下 i) $a_3 > 0, a_1 < nd$; ii) $a_3 < 0, a_1 > nd$, 我们从(11)式都可以解得在 $(y_1, a_1) = (0, nd)$ 附近的分歧解为

$$\begin{cases} y_1^* = \sqrt{-\frac{2^n \pi^n}{3^n a_3} (a_1 - nd)} + o(|a_1 - nd|), \\ y_2^* = -\sqrt{-\frac{2^n \pi^n}{3^n a_3} (a_1 - nd)} + o(|a_1 - nd|) \end{cases} \quad (12)$$

由(5), (6), (12)式可得系统(1)的分歧解表达式为

$$\begin{aligned} v_1^* &= \sqrt{-\frac{4^n}{3^n a_3} (a_1 - nd)} \prod_{i=1}^n \sin x_i + \\ & o(|a_1 - nd|^{\frac{1}{2}}), \\ v_2^* &= -\sqrt{-\frac{4^n}{3^n a_3} (a_1 - nd)} \prod_{i=1}^n \sin x_i + \\ & o(|a_1 - nd|^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

结论(ii)成立. v_1^*, v_2^* 的表达式意味着系统(1)在 $(u, a_1) = (0, nd)$ 附近发生叉式分歧, 且当 $a_3 > 0$ 时分歧解 v_1, v_2 出现在 $a_1 < nd$ 一侧, 所以叉式分歧是次临界分歧. 当 $a_3 < 0$ 时, 分歧解 v_1, v_2 出现在 $a_1 > nd$ 一侧. 所以叉式分歧是超临界分歧.

由文献[16]中定理 6.4 可得结论(iii), (iv), (v).

结论(vi)的证明和定理 2.1 结论(v)的证明类似, 不再赘述. 证毕.

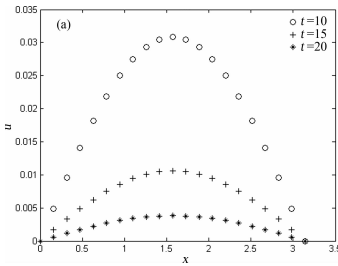
3 数值分析

本节将通过几个实例的数值模拟来验证理论分析的正确性.

对系统(1), 取 $d = 1, f(u) = 0.8u - u^2, \Omega = (0, \pi), \psi(x) = 0.5x(\pi - x)$. 由于 $a_1 = 0.8 < 1$, 根据定理 2.1, $u = 0$ 是局部渐近稳定的. 图 1(a)验证

了所得结论.

对系统(1), 取 $d=1, f(u)=1.2u-u^2, \Omega=(0, \pi), \phi(x)=0.5x(\pi-x)$. 由于 $a_1=1.2>1, \|\psi\|_H \approx 1.5969, a_2\langle\psi, e_1\rangle_H \approx -1.5958<0$, 根据定



理 2.1, $\phi \in D_1$, 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \phi) - v^*\|_H = 0$, 即 $v^* \approx \frac{3\pi}{40} \sin x$ 是局部渐近稳定的. 图 1(b) 验证了所得结论.

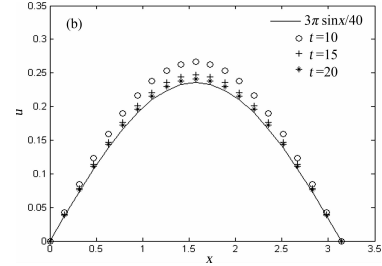


图 1 $u=u(x)$ 在 $t=10, 15, 20$ 的图像: (a) $a_1=0.8, \phi(x)=0.5x(\pi-x)$ 时, $u=0$ 渐近稳定; (b) $a_1=1.2, \phi(x)=0.5x(\pi-x)$ 时, $v^* \approx \frac{3\pi}{40} \sin x$ 渐近稳定

Fig. 1 The graph of $u=u(x)$ at $t=10, 15, 20$: (a) $u=0$ is asymptotically stable for $a_1=0.8, \phi(x)=0.5x(\pi-x)$; (b) $v^* \approx \frac{3\pi}{40} \sin x$ is asymptotically stable for $a_1=1.2, \phi(x)=0.5x(\pi-x)$

对系统(1), 取 $d=1, f(u)=0.8u-u^3, \Omega=(0, \pi), \phi(x)=0.5x(\pi-x)$. 由于 $a_1=0.8<1$, 根

据定理 2.2, $u=0$ 是局部渐近稳定的. 图 2(a) 验证了所得结论.

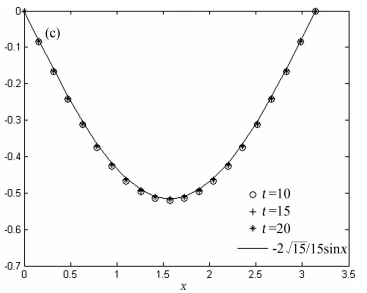
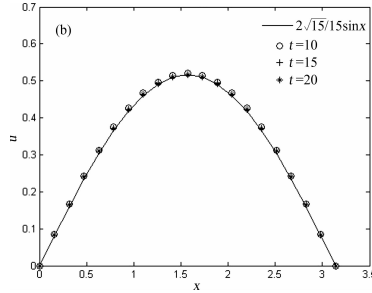
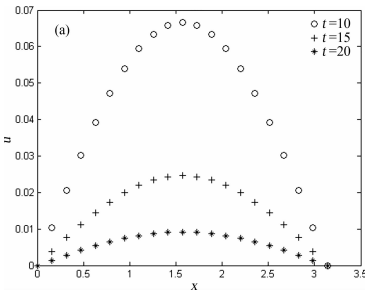


图 2 $u=u(x)$ 在 $t=10, 15, 20$ 的图像: (a) $a_1=0.8, \phi(x)=0.5x(\pi-x)$ 时, $u=0$ 渐近稳定; (b) $a_1=1.2, \phi(x)=0.5x(\pi-x)$ 时, $v_1^* \approx \frac{2\sqrt{15}}{15} \sin x$ 渐近稳定; (c) $a_1=1.2, \phi(x)=-0.5x(\pi-x)$ 时, $v_2^* \approx -\frac{2\sqrt{15}}{15} \sin x$ 渐近稳定

Fig. 2 The graph of $u=u(x)$ at $t=10, 15, 20$: (a) $u=0$ is asymptotically stable for $a_1=0.8, \phi(x)=0.5x(\pi-x)$; (b) $v_1^* \approx \frac{2\sqrt{15}}{15} \sin x$ is asymptotically stable for $a_1=1.2, \phi(x)=0.5x(\pi-x)$; (c) $v_2^* \approx -\frac{2\sqrt{15}}{15} \sin x$ is asymptotically stable for $a_1=1.2, \phi(x)=-0.5x(\pi-x)$

对系统(1), 取 $d=1, f(u)=1.2u-u^3, \Omega=(0, \pi), \phi(x)=0.5x(\pi-x)$. 由于 $a_1=1.2>1, a_3=-1<0, \|\psi\|_H \approx 1.5969, \langle\psi, e_1\rangle_H \approx 1.5958>0$, 根据定理 2.2, $\phi \in O_1$, 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \phi) - v_1^*\|_H = 0$, 即 $v_1^* \approx \frac{2\sqrt{15}}{15} \sin x$ 是局部渐近稳定的. 图 2(b) 验证了所得结论.

稳定的. 图 2(c) 验证了所得结论.

4 应 用

我们把数学理论结果应用于下面的带有食物制约的种群模型^[18]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + a_1 u \frac{K-u}{K+Cu}, & x \in \Omega, t \in (0, \infty), \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x) > 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (13)$$

对系统(1), 取 $d=1, f(u)=1.2u-u^3, \Omega=(0, \pi), \phi(x)=-0.5x(\pi-x)$. 由于 $a_1=1.2>1, a_3=-1<0, \|\psi\|_H \approx 1.5969, \langle\psi, e_1\rangle_H \approx -1.5958<0$, 根据定理 2.2, $\phi \in O_2$, 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \phi) - v_2^*\|_H = 0$, 即 $v_2^* \approx -\frac{2\sqrt{15}}{15} \sin x$ 是局部渐近

其中 $\Omega=(0, \pi)^3, u$ 代表种群密度, $d>0$ 是扩散系数, $a_1>0$ 代表出生率, $K>0$ 是栖息地的环境最大承载量, $C>0$ 是栖息地的食物制约效应. 此外, 初值 ϕ 是连续的, 并且其范数 $\|\phi\|_H$ 足够小.

注意到 $a_1 u \frac{K-u}{K+Cu}$ 在 $u=0$ 有泰勒展式

$$a_1(C+1) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{C^{n-2}}{K^{n-1}} u^n =$$

$$a_1 u - a_1 \frac{C+1}{K} u^2 + a_1 \frac{C(C+1)}{K^2} u^3 + \dots,$$

容易验证问题(13)满足定理 2.1 的条件. 根据定理 2.1 有如下结论:

(i) 如果出生率小于扩散系数的三倍,那么种群最终灭绝;

(ii) 如果出生率大于扩散系数的三倍,那么种群密度最终在栖息地(空间上)服从如下分布

$$u = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^3 \left(1 - \frac{3d}{a_1}\right) \frac{K}{C+1} \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3.$$

这意味着种群密度在栖息地上关于空间成对称分布,越靠近栖息地核心地带种群密度越大,反之越小;

(iii) 种群数量最终趋于 $\left(\frac{3\pi}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{3d}{a_1}\right) \frac{K}{C+1}$.

这意味着在出生率和扩散系数一定的前提下,种群数量与栖息地的环境最大承载量成正比,与栖息地的食物制约效应系数与 1 的和成反比.

参考文献:

- [1] Fisher R A. The wave of advance of advantageous genes [J]. *Ann Hum Genet*, 1937, 7: 353.
- [2] Newman W I. The long-time behavior of the solution to a non-linear diffusion problem in population genetics and combustion [J]. *J Theor Biol*, 1983, 104: 473.
- [3] Murray J D. *Mathematical biology* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [4] Kametaka Y. On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type [J]. *Osaka J Math*, 1976, 13: 11.
- [5] Rodrigo M, Mimura M. Annihilation dynamics in the KPP-Fisher equation [J]. *Eur J Appl Math*, 2002, 13: 195.
- [6] Hamel F, Roques L. Fast propagation for KPP e-

quations with slowly decaying initial conditions [J]. *J Differ Equat*, 2010, 249: 1726.

- [7] Moet H J K. A note on the asymptotic behavior of solutions of the KPP equation [J]. *Siam J Math Anal*, 1979, 10: 728.
- [8] Temam R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics* [M]. New York: Springer, 1997.
- [9] Kollar R, Novak S. Existence of traveling waves for the generalized FKPP equation [J]. *B Math Biol*, 2016, 79: 525.
- [10] Yazdani H R, Nadjafikhah M. Symmetries of the generalized Fisher equation with t -dependent coefficient [J]. *Int J Pur Appl Math*, 2017, 117: 401.
- [11] Gao J, Delos J B. Quantum manifestations of bifurcations of closed orbits in the photoabsorption spectra of atoms in electric fields [J]. *Phys Rev A*, 1992, 90: 356.
- [12] Founargiotakis M, Farantos S C, Skokos C, *et al.* Bifurcation diagrams of periodic orbits for unbounded molecular systems: FH_2 [J]. *Chem Phys Lett*, 1997, 277: 456.
- [13] Wiczorek S, Krauskopf B, Simpson T B, *et al.* The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers [J]. *Phys Rep*, 2005, 416: 1.
- [14] Galan J, Freire E. Chaos in a mean field model of coupled quantum wells: bifurcation of periodic orbits in a symmetric hamiltonian system [J]. *Rep Math Phys*, 1994, 44: 87.
- [15] Ma T, Wang S H. Attractor bifurcation theory and its applications to Rayleigh-Benard convection [J]. *Comm Pur Appl Anal*, 2003, 2: 591.
- [16] Ma T, Wang S H. *Bifurcation theory and applications* [M]. Singapore: World Scientific, 2005.
- [17] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations* [M]. New York: Springer, 2006.
- [18] Smith F E. Population dynamics in *Daphnia magna* and a new model for population growth [J]. *Ecology*, 1963, 44: 651.

引用本文格式:

中文: 张强, 曾艳, 周艳红. 一类广义 Fisher 方程的稳定性和动态分枝 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2019, 56: 222.

英文: Zhang Q, Zeng Y, Zhou Y H. Stability and dynamical bifurcation of a generalized Fisher equation [J]. *J Sichuan Univ; Nat Sci Ed*, 2019, 56: 222.