2021 年 11 月　　　　四川大学学报(自然科学版)　　　　Nov.　2021
第 58 卷　第 6 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 58　No. 6

# 单位球上含梯度项的椭圆边值问题的正径向解

唐　颖，李永祥
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

**摘　要**：本文考虑了单位球 $\Omega=\{x\in \mathbf{R}^N:\ |x|<1\}$ 上含梯度项的椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(|x|,u,|\nabla u|),x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

正径向解的存在性，其中 $N\geqslant 2$，$f:[0,1]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 连续. 在 $f(r,\xi,\eta)$ 满足一些不等式的条件下，本文应用 Leray-Schauder 不动点定理获得了问题正径向解的存在性.

**关键词**：单位球上的椭圆边值问题；正径向解；Nagumo 型增长条件；Leray-Schauder 不动点定理

**中图分类号**：O175.25　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.061004

# Positive radial solutions for the elliptic boundary value problem with gradient terms on the unit ball

*TANG Ying, LI Yong-Xiang*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract**: We consider the existence of positive radial solutions of the elliptic boundary value problem with gradient term

$$\begin{cases}-\Delta u=f(|x|,u,|\nabla u|),\ x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

where $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N:\ |x|<1\}$, $N\geqslant 2$, $f:[0,1]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ is continuous. Under the condition that $f(r,\xi,\eta)$ satisfies certain inequalities, the existence of positive radial solutions is obtained by using the Leray-Schauder fixed point theorem.

**Keywords**: Elliptic boundary value problem on the unit ball; Positive radial solution; Nagumo-type growth condition; Leray-Schauder fixed point theorem
(2010 MSC 34B15)

## 1　引　言

非线性项中含有梯度项的一般椭圆边值问题出现在应用数学与物理的许多领域，其可解性的研究有重要价值. 本文考虑如下单位球上含梯度项的椭圆边值问题(BVP)

$$\begin{cases}-\Delta u=f(|x|,u,|\nabla u|),\ x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{1}$$

正径向解的存在性，其中 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N:\ |x|<1\}$，$N\geqslant 2$，$I=[0,1]$，$\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$，$f:I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 为非线性连续函数.

对于非线性项中不含梯度项的特殊情形，即

**收稿日期**：2021-03-05
**基金项目**：国家自然科学基金(12061062；11661071)；校级科研基金(2020KYZZ001110)
**作者简介**：唐颖(1995－)，女，四川广元人，硕士研究生，主要研究领域为非线性泛函分析. E-mail：m15709312405@163.com
**通讯作者**：李永祥. E-mail：liyx@nwnu.edu.cn

简单椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(|x|,u),x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

其径向解的存在性已有较深入的研究，见文献[1-5]. 对于非线性项含梯度项的情形，当 $\Omega$ 为环形区域或球外部区域时，部分文献[6-8]讨论了其正径向解的存在性. 其中，文献[6-7]在非线性函数 $f(r,\xi,\eta)$非负且允许 $f$ 关于 $\xi,\eta$ 超线性或次线性增长的条件下利用不动点指数理论获得了 BVP(1)正径向解的存在性. 对于 $f$ 关于 $\xi,\eta$ 超线性增长的情形，文献[6-7]还假设 $f$ 满足 Nagumo 型增长条件，该条件限制了 $f$ 关于 $\eta$ 至多二次增长. 然而，对球域而言此结果不成立. 事实上，文献[6]给出了一个例子：

$$\begin{cases}-\Delta u=a|u|^p+b|\nabla u|^q,\ x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{2}$$

其中 $a,b,p,q$ 为常数，$\Omega$ 为环域. 当 $a>0,b\geqslant0$，$p>1,1<q\leqslant2$ 时，由文献[6，定理 1.1]，BVP(2)有一个正径向解. 但 Grossi[4] 指出，当 $\Omega$ 为球域，$p>\dfrac{N+2}{N-2}(N\geqslant3)$时椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=|u|^p,\ x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3}$$

没有正径向解. 此时 BVP(3)为 BVP(2)中 $a=1$，$b=0$的特例，从而 BVP(2)在球域上无正径向解. 这说明文献[6]中的结论对球域上的 BVP(1)不成立.

一般来说，研究球域上的椭圆边值问题径向解的存在性比环域及球外部区域上的情形更复杂. 目前关于球域上 BVP(1)径向解的存在性结果还很少. 最近，文献[9]应用上下解方法研究了单位球上 BVP(1)正径向解的存在性，在非线性项 $f$ 满足适当的不等式条件下获得了 BVP(1)正径向解的存在性，该不等式条件允许 $f(r,\xi,\eta)$关于 $\xi$ 与 $\eta$ 负向超线性增长，在 $f(r,\xi,\eta)$关于 $\eta$ 超线性增长情形下要求 $f(r,\xi,\eta)$关于 $\eta$ 满足 Nagumo 型增长条件.

本文继续研究单位球上 BVP(1)正径向解的存在性. 在与文献[9]不同的不等式条件下，我们给出 BVP(1)正径向解的存在性结果，其中的不等式条件允许 $f(r,\xi,\eta)$关于 $\eta$ 可超线性增长.

## 2　预备知识

对问题(1)的径向对称解 $u=u(|x|)$，我们令 $r=|x|$，将其转化为区间 $I$ 上的常微分边值问题(BVP)

$$\begin{cases}-u''(r)-\dfrac{N-1}{r}u'(r)=f(r,u(r),\\ \quad |u'(r)|),\ r\in I,\\ u'(0)=0,\ u(1)=0\end{cases}\tag{4}$$

易见，若 $u(r)\in C^2(I)$是 BVP(4)的解，则 $u(|x|)\in C^2(\overline{\Omega})$为椭圆边值问题(1)的径向解. 因而我们只需讨论 BVP(4)解的存在性.

记 $C(I)$为 $I$ 上的全体连续函数按范数 $\|u\|_C=\max\limits_{r\in I}|u(r)|$构成的 Banach 空间，$C^+(I)$表示$C(I)$上的全体非负函数之集. 对 $n\in\mathbf{N}$,$C^n(I)$表示 $I$ 上的全体 $n$ 阶连续可微函数按范数

$$\|u\|_{C^n}=\max_{r\in I}\{\|u\|_C,\|u'\|_C,\cdots,\|u^{(n)}\|_C\}$$

构成的 Banach 空间.

为了讨论 BVP(4)，我们先考虑相应的二阶线性边值问题(LBVP)

$$\begin{cases}-u''(r)-\dfrac{N-1}{r}u'(r)=h(r),\ r\in I,\\ u'(0)=0,\ u(1)=0\end{cases}\tag{5}$$

**引理 2.1**[9]　$\forall h\in C(I)$，LBVP(5)有唯一解 $u:=Sh\in C^2(I)$，且解算子 $S:C(I)\to C^1(I)$为线性全连续算子.

**引理 2.2**　对 $\forall h\in C^+(I)$，LBVP(5)的解 $u=Sh$ 满足下列条件

(i) $\|u\|_2^2\leqslant\dfrac{1}{2}\|u'\|_2^2$;

(ii) $u\geqslant0,u'\leqslant0$.

**证明**　(i) 由 Hölder 不等式有

$$\|u\|_2^2=\int_0^1|u(r)|^2\mathrm{d}r=\int_0^1\left|\int_r^1u'(t)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}r\leqslant\|u'\|_2^2\int_0^1(1-r)\mathrm{d}r\leqslant\frac{1}{2}\|u'\|_2^2.$$

(ii) $\forall h\in C^+(I)$，方程(5)两边同乘 $r^{N-1}$得

$$-(r^{N-1}u'(r))'=r^{N-1}h(r),\ r\in I\tag{6}$$

对方程(6)两边积分，应用(5)中的边界条件得

$$u'(r)=-\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^rs^{N-1}h(s)\mathrm{d}s,$$

$$u(r)=\int_r^1\frac{1}{t^{N-1}}\mathrm{d}t\int_0^ts^{N-1}h(s)\mathrm{d}s:=Sh(r).$$

因此，

$$u(r)\geqslant0,u'(r)\leqslant0,r\in I.$$

证毕.

记 $P=\{u\in C^1(I)\,|\,u(r)\geqslant0,r\in I\}$，则 $P$ 为

$C^1(I)$中的闭凸锥．由引理 2.1 及引理 2.2，ii)，LBVP(5)的解算子 $S:C^+(I)\to P$ 为全连续算子．

## 3　主要结果

**定理 3.1**　设 $f:I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 连续．若 $f$ 满足

($H_1$) 存在常数 $a,b\geqslant 0$，满足 $a/2+b<1$ 及 $C_0>0$，使得

$$f(r,\xi,\eta)\xi\leqslant a\xi^2+b\eta^2+C_0,\quad (r,\xi,\eta)\in I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+;$$

($H_2$) $\forall M>0$，存在单调递增的连续函数 $g_M:\mathbf{R}^+\to(0,+\infty)$，满足

$$\int_0^{+\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{g_M(\rho)}=+\infty \tag{7}$$

使得

$$f(r,\xi,\eta)\leqslant g_M(\eta),\ (r,\xi,\eta)\in I\times[0,M]\times\mathbf{R}^+ \tag{8}$$

则 BVP(1)至少有一个正径向解．

证明　$\forall u\in P$，令

$$F(u)(r):=f(r,u(r),|u'(r)|),\ r\in I.$$

则 $F:P\to C^+(I)$ 连续且把有界集映为有界集．定义映射 $A=S\circ F$. 由 $S:C^+(I)\to P$ 为线性全连续算子知算子 $A:P\to P$ 为线性全连续算子．再由 $S$ 的定义，BVP(4)的正解等价于算子 $A$ 的正不动点．

考虑同伦簇方程

$$u=\lambda Au,\ 0<\lambda<1 \tag{9}$$

下面我们证明方程簇(9)的解集在 $P$ 中有界．设 $u\in C^2(I)\cap C^+(I)$ 为方程簇(9)中某个 $\lambda\in(0,1)$ 对应的方程的解，则 $u=S(\lambda F(u))$．令 $h=\lambda F(u)$，按 $S$ 的定义，$u$ 为 $h=\lambda F(u)$ 相应的 LBVP(5)的解．因此，$u\in C^2(I)\cap C^+(I)$满足方程

$$\begin{cases}-u''(r)-\dfrac{N-1}{r}u'(r)=\\ \quad\lambda f(r,u(r),|u'(r)|),\ r\in I,\\ u'(0)=0,\ u(1)=0\end{cases} \tag{10}$$

方程(10)两边同乘 $u(r)$，由条件($H_1$)及引理 2.2 (ii)有

$$\begin{aligned}&-u''(r)u(r)\leqslant\\ &\quad -u''(r)u(r)-\frac{N-1}{r}u'(r)u(r)=\\ &\quad\lambda f(r,u(r),|u'(r)|)u(r)\leqslant\\ &\quad f(r,u(r),|u'(r)|)u(r)\leqslant\\ &\quad au^2(r)+b|u'(r)|^2+C_0,\ r\in I\end{aligned} \tag{11}$$

式(11)两端同时在 $I$ 上积分，由引理 2.2(i)可得

$$\begin{aligned}&\|u'\|_2^2=-\int_0^1u''(r)u(r)\mathrm{d}r\leqslant\\ &\int_0^1(au^2(r)+b|u'(r)|^2+C_0)\mathrm{d}r=\\ &a\|u\|_2^2+b\|u'\|_2^2+C_0\leqslant\\ &\left(\frac{a}{2}+b\right)\|u'\|_2^2+C_0,\ r\in I,\end{aligned}$$

从而

$$\|u'\|_2\leqslant\sqrt{\frac{C_0}{1-\left(\dfrac{a}{2}+b\right)}}:=M.$$

因

$$\begin{aligned}&|u(r)|=\left|\int_r^1u'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_r^1|u'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\ &\quad\|u'\|_2\leqslant M,\ r\in I,\end{aligned}$$

故有估计

$$\|u\|_C=\max_{r\in I}|u(r)|\leqslant M \tag{12}$$

对此 $M>0$，由 Nagumo 型增长条件($H_2$)可知，存在连续函数 $g_M:\mathbf{R}^+\to(0,+\infty)$满足式(7)，使得 $f$ 满足式(8)．由式(7)可知，存在常数 $M_1=M_1(M)>0$，使得

$$\int_0^{M_1}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{g_M(\rho)}>M \tag{13}$$

下证 $\|u'\|_C\leqslant M_1$. 不妨设 $u'(r)$不恒为 0，注意到 $u'(0)=0$，由连续函数的最值定理及引理 2.2 (ii)，$\exists s_1\in(0,1]$，使得 $\|u'\|_C=-u'(s_1)>0$．令

$$r_1=\sup\{\bar{r}\in[0,s_1)\,|\,u'(\bar{r})=0\},$$

则 $0\leqslant r_1<s_1\leqslant 1$，$u'(r_1)=0$．当 $r\in(r_1,s_1]$时，$u'(r)<0$．因此，当 $r\in[r_1,s_1]$时，由式(8)有

$$\begin{aligned}&-u''(r)\leqslant -u''(r)-\frac{N-1}{r}u'(r)=\\ &\quad\lambda f(r,u(r),|u'(r)|)\leqslant\\ &\quad f(r,u(r),|u'(r)|)\leqslant\\ &\quad g_M(-u'(r)).\end{aligned}$$

所以

$$-\frac{u''(r)(-u'(r))}{g_M(-u'(r))}\leqslant -u'(r),r\in[r_1,s_1].$$

上式两边从 $r_1$ 到 $s_1$ 积分得

$$\begin{aligned}&-\int_{r_1}^{s_1}\frac{u''(r)(-u'(r))}{g_M(-u'(r))}\mathrm{d}r\leqslant-\int_{r_1}^{s_1}u'(r)\mathrm{d}r=\\ &\quad u(r_1)-u(s_1)\leqslant u(r_1)\leqslant\|u\|_C\leqslant M\end{aligned} \tag{14}$$

对式(14)左端做变量代换 $\rho=-u'(r)$，有

$$\int_0^{-u'(s_1)}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{g_M(\rho)}\leqslant M \tag{15}$$

由式(13)和(15)知，$-u'(s_1)=\|u'\|_C\leqslant M_1$．因

此，由式(12)可得

$$\|u\|_{C^1}=\max\{\|u\|_C,\|u'\|_C\}\leqslant M+M_1\coloneqq M_2,$$

即方程簇的解集在 $C^1(I)$ 中有界. 由锥上的 Leray-Schauder 不动点定理[10]知 $A$ 在 $P$ 中有不动点，该不动点为 BVP(4)的正解,从而 BVP(1)有正径向解. 证毕.

在定理 3.1 中，$f(r,\xi,\eta)$关于 $\eta$ 可超线性增长，见例 3.3. 特别地，当 $f(r,\xi,\eta)$关于 $\xi,\eta$ 均一次增长时，我们有下述推论.

**推论 3.2**　设 $f:I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 连续. 若 $f$ 满足

$(H_3)$ 存在常数 $a,b\geqslant 0$，满足 $a/2+b<1$ 及 $C_0>0$，使得

$$f(r,\xi,\eta)\leqslant a\xi+b\eta+C_0,\quad (r,\xi,\eta)\in I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+,$$

则 BVP(1)至少有一个正径向解.

证明　$(H_3)\Rightarrow(H_2)$显然,下证$(H_3)\Rightarrow(H_1)$. 任取$(r,\xi,\eta)\in I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$,令

$$p_1=((b+1/12)/\sqrt{2})^{1/2}\xi,$$

$$q_1=\frac{b\eta}{2((b+1/12)/\sqrt{2})^{1/2}},$$

$$p_2=((\sqrt{3}-\sqrt{2})(b+1/12))^{1/2}\xi,$$

$$q_2=\frac{C_0}{2((\sqrt{3}-\sqrt{2})(b+1/12))^{1/2}}.$$

利用不等式 $2pq\leqslant p^2+q^2$, $p,q\in\mathbf{R}$ 并由条件$(H_3)$有

$$f(r,\xi,\eta)\xi\leqslant a\xi^2+b\xi\eta+C_0\xi=a\xi^2+2p_1q_1+2p_2q_2\leqslant a\xi^2+{p_1}^2+{p_2}^2+{q_1}^2+{q_2}^2 \tag{16}$$

令

$$a_1=a+\frac{b+1/12}{\sqrt{2}}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})(b+1/12),$$

$$b_1=\frac{\sqrt{2}b^2}{4(b+1/12)},$$

$$C=\frac{{C_0}^2}{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})(b+1/12)}.$$

由常数 $a,b\geqslant 0$,满足 $a/2+b<1$ 知

$$\frac{a_1}{2}+b_1=\frac{a}{2}+\left(\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{2}}\right)b+\frac{\sqrt{6}-1}{24\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}b^2}{4(b+1/12)}<\frac{338\sqrt{3}-25\sqrt{2}}{624}<\frac{609-25}{624}<1.$$

所以 $a_1/2+b_1<1$. 由式(16)有

$$f(r,\xi,\eta)\xi\leqslant a_1\xi^2+b_1\eta^2+C,\quad (r,\xi,\eta)\in I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+.$$

因此条件$(H_1)$成立. 由定理 3.1，BVP(1)有正径向解.

**例 3.3**　设 $N\geqslant 2$. 考虑单位球 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N:|x|<1\}$上含梯度项的椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\dfrac{3}{2}u+\dfrac{1}{5}\dfrac{|\nabla u|^2}{u^2+1}+\sin\pi|x|, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{17}$$

对应于 BVP(1)，相应的非线性项为

$$f(r,\xi,\eta)=\frac{3}{2}\xi+\frac{1}{5}\frac{\eta^2}{\xi^2+1}+\sin\pi r,\quad (r,\xi,\eta)\in I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+ \tag{18}$$

当 $\|u\|_C\leqslant M$ 时，

$$f(r,\xi,\eta)\leqslant\left(\frac{3}{2}M+1\right)+\frac{1}{5}\eta^2\leqslant C_1(M)+C_2\eta^2.$$

令 $g_M(\eta)=C_1(M)+C_2\eta^2$,则 $f(r,\xi,\eta)$满足条件$(H_2)$.

下面验证 $f(r,\xi,\eta)$满足条件$(H_1)$. 取

$$a=\frac{35}{22},\ b=\frac{1}{5},\ C_0=\frac{11}{4}.$$

则

$$\frac{a}{2}+b=\frac{219}{220}<1.$$

由式(18)有

$$\begin{aligned}0\leqslant f(r,\xi,\eta)\xi=&\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{5}\frac{\xi\eta^2}{\xi^2+1}+\xi\sin\pi r\leqslant\\&\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{5}\eta^2+2\sqrt{1/11}\frac{\xi\sin\pi r}{2\sqrt{1/11}}\leqslant\\&\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{11}\right)\xi^2+\frac{1}{5}\eta^2+\frac{11}{4}=\\&a\xi^2+b\eta^2+C_0,(r,\xi,\eta)\in I\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+,\end{aligned}$$

即 $f(r,\xi,\eta)$满足条件$(H_1)$. 从而由定理 3.1 知 BVP(17)有正径向解.

## 参考文献：


[1] 姚庆六. 一类非线性 Dirichlet 边值问题的正径向解[J]. 数学物理学报，2009，29：48.

[2] Castro A，Kurepa A. Infinitely many radially symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball [J]. Proc Amer Math Soc，1987，101：57.

[3] Kajikiya R，Ko E. Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation [J]. J Math Anal Appl，2020，484：1.

[4] Grossi M. Radial solutions for the Brezis-Nirenberg problem involving large nonlinearities [J]. J Funct

Anal, 2008, 254: 2995.

[5] David G C, Hossein T, Yang J F. On a variational approach to existence and multiplicity results for semipositone problems [J]. Electron J Differ Eq, 2006, 11: 1.

[6] Li Y X. Positive radial solutions for elliptic equations with nonlinear gradient terms in an annulus [J]. Complex Var Elliptic Eq, 2018, 63: 171.

[7] Li Y X, Ding Y H, Ibrahim E. Positive radial solutions for elliptic equations with nonlinear gradient terms on an exterior domain [J]. Mediterr J Math, 2018, 15: 83.

[8] Dong X, Wei Y H. Existence of radial solutions for nonlinear elliptic equations with gradient terms in annular domains [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2019, 187: 93.

[9] Li Y X. Positive radial solutions for elliptic equations with nonlinear gradient terms on the unit ball [J]. Mediterr J Math, 2020, 17: 176.

[10] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

**引用本文格式：**

中　文：唐颖，李永祥. 单位球上含梯度项的椭圆边值问题的正径向解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：061004.

英　文：Tang Y, Li Y X. Positive radial solutions for the elliptic boundary value problem with gradient terms on the unit ball [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 061004.