一类一阶周期边值问题多个正解的存在性

吴梦丽
(西安电子科技大学数学与统计学院，西安 710126)

摘 要：本文研究了一阶周期边值问题

$$\begin{cases} -u'(t)+a(t)u(t)=\lambda f(u(t)),\ 0<t<T, \\ u(0)=u(T) \end{cases}$$

多个正解的存在性，其中 $\lambda>0$ 是一个参数，$a\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 是一个 T-周期函数且 $\int_0^T a(t)\mathrm{d}t>0$，$f\in C([0,\infty),(0,\infty))$ 且单调递增. 在 $f_0=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}=0$，$f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=0$ 的条件下，本文证明存在一个 $\lambda^*>0$，使当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时问题不存在正解；当 $\lambda=\lambda^*$ 时问题至少存在一个正解；当 $\lambda>\lambda^*$ 时问题至少存在两个正解. 主要结果的证明基于上下解方法和 Leray-Schauder 度.

关键词：正解；存在性；多解性；上下解；拓扑度
中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.011004

Existence of multiple positive solutions for a class of first-order periodic boundary value problems

WU Meng-Li
(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, China)

Abstract: We investigate the existence of multiplie positive solutions for the following first-order periodic boundary value problem

$$\begin{cases} -u'(t)+a(t)u(t)=\lambda f(u(t)),\ 0<t<T, \\ u(0)=u(T), \end{cases}$$

where the parameter $\lambda>0$, $a(t)\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ is a T-periodic function with $\int_0^T a(t)\mathrm{d}t>0$, $f\in C([0,\infty),(0,\infty))$ is a monotonically increasing function. With $f_0=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}=0$, $f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=0$, we show that there exists a $\lambda^*>0$ such that the problem has no positive solution for $0<\lambda<\lambda^*$, at least one positive solution for $\lambda=\lambda^*$ and at least two positive solutions for $\lambda>\lambda^*$. The proof of the main results is based on the theorem for upper and lower solutions and Leray-Schauder degree.

Keywords: Positive solution; Existence; Multiplicity; Upper and lower solutions; Topological degree
(2010 MSC 34B15)

收稿日期：2021-04-14
基金项目：国家自然科学基金(12061064)
作者简介：吴梦丽(1997－)，女，河南遂平人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：wml110521@163.com

1　引　言

一阶周期边值问题在生物学,经济学,生态学等领域有着广泛应用. 近年来,对一阶含参方程周期正解存在性的研究出现了一些进展[1-8],如 Ma 等[3]应用锥上不动点定理研究了 f 在 0 处和∞处满足不同的条件及 g 在有界的条件下方程

$$u'(t)=a(t)g(u(t))u(t)-\lambda b(t)f(u(t-\tau(t))) \tag{1}$$

周期正解存在性. 其中,文献[2]通过定义正算子和锥得到了下面的结果:

定理 A　假设

(A1) $\lambda>0$ 是一个参数;

(A2) $a,b\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 是 ω-周期函数且 $\int_0^\omega a(t)\mathrm{d}t>0,\int_0^\omega b(t)\mathrm{d}t>0$;

(A3) $f,g\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 且当 $s>0$ 时,$f(s)>0$,$\tau(t)$ 是 ω-周期函数.

若 $f_0=f_\infty=0$,则存在 $0<\mu_*<\mu^*$,当 $\mu>\mu^*$ 时问题(1)存在两个周期正解;当 $0<\mu<\mu_*$ 时,问题(1)不存在周期正解.

值得注意的是,在定理 A 中当 $\mu\in[\mu_*,\mu^*]$ 时,问题(1)周期正解的存在性未知,μ_* 能否和 μ^* 相等也是问题. 受上述文献的启发,本文在 f 单增的条件下运用上下解方法及 Leray-Schauder 度理论考虑如下一阶周期边值问题

$$\begin{cases}-u'(t)+a(t)u(t)=\lambda f(u(t)),\ 0<t<T,\\ u(0)=u(T)\end{cases} \tag{2}$$

多个正解的存在性.

本文总假定

(H1) $f_0=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{f(u)}{u}=0,\ f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=0.$

本文主要结果如下:

定理 1.1　设(H1)成立. 则当 λ 充分小时,问题(1)不存在正解,当 λ 充分大时,问题(2)存在两个正解.

定理 1.2　设(H1)成立. 则存在 $\lambda^*>0$,使得当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时问题(2)不存在正解;当 $\lambda=\lambda^*$ 时问题(2)至少存在一个正解;当 $\lambda>\lambda^*$ 时问题(2)至少存在两个正解.

2　预备知识

引理 2.1[9]　设 X 是 Banach 空间,K 是 X 中的一个锥. 当 $r>0$ 时,定义 $K_r=\{x\in K:\|x\|<r\}$. 假设 $T:\bar{K}_r\to K$ 是紧算子,使得当 $x\in\partial K_r$ 时 $Tx\neq x$.

(i) 若 $x\in\partial K_r$ 满足 $\|x\|\leqslant\|Tx\|$,则 $i(T,K_r,K)=0$.

(ii) 若 $x\in\partial K_r$ 满足 $\|x\|\geqslant\|Tx\|$,则 $i(T,K_r,K)=1$.

本文的工作空间是

$$X=\{u(t):u(t)\in C[0,T],u(0)=u(T)\},$$

其在范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|u(t)|$,$u\in X$ 下构成 Banach 空间. 定义 K,C 是 X 中的锥,

$$K=\{u\in X:u\geqslant0,u(t)\geqslant\sigma\|u\|,t\in[0,T]\},$$
$$C=\{u\in X:u>0,t\in[0,T]\}.$$

其中 $\sigma=\mathrm{e}^{-\int_0^T a(t)\mathrm{d}t}$. 定义

$$\Omega_r=\{u\in K:\|u\|<r\},$$

其中 r 为正参数,$\partial\Omega_r=\{u\in K:\|u\|=r\}$. 定义算子 $T_\lambda:X\to X$ 为

$$(T_\lambda u)(t)=\lambda\int_0^T G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\frac{\mathrm{e}^{-\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta}}{1-\mathrm{e}^{-\int_0^T a(\theta)\mathrm{d}\theta}}$$

当 $0\leqslant s\leqslant T$ 时满足

$$\frac{\sigma}{1-\sigma}\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{1}{1-\sigma},\ 0<\sigma<1.$$

引理 2.2　对问题(2)中的 $f(u)$ 有 $T_\lambda(C)\subset K$ 且 $T_\lambda:K\to K$ 是全连续算子.

证明　对任意的 $u\in C,t\in[0,T]$,有

$$(T_\lambda u)(t)=\lambda\int_0^T G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac{\sigma}{1-\sigma}\lambda\int_0^T f(u(s))\mathrm{d}s=$$
$$\frac{\sigma(1-\sigma)}{1-\sigma}\frac{1}{1-\sigma}\lambda\int_0^T f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\sigma\|T_\lambda u\|.$$

因而 $T_\lambda(C)\subset K$. 由 Arzela-Ascoli 定理[10],易证 $T_\lambda:K\to K$ 是全连续算子. 证毕.

3　上下解

定义 3.1[11]　如果 $x\in X\cap C^1[0,T]$ 且满足

$$x'(t)+\lambda f(x(t))-a(t)x(t)\leqslant0,\ 0<t<T,$$

则称 x 是问题(2)的上解.

定义 3.2[11]　如果 $y\in X\cap C^1[0,T]$ 且满足

$$y'(t)+\lambda f(y(t))-a(t)y(t)\geqslant0,\ 0<t<T,$$

则称 y 是问题(2)的下解.

引理 3.3 设(H1)成立. 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是问题(2)的上解和下解，且满足当 $t\in[0,T]$ 时 $y(t)\leqslant x(t)$，则至少存在一个解 $u(t)$ 且满足 $y(t)\leqslant u(t)\leqslant x(t)$.

证明　首先考察辅助问题

$$\begin{cases}-u'(t)+a(t)u(t)=\lambda f^*(u(t)),\ 0<t<T,\\ u(0)=u(T)\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$f^*(u(t))=f(P_{x,y}(u(t)))-\arctan[u(t)-P_{x,y}(u(t))]\tag{4}$$

$$P_{x,y}(u(t))=\max\{y(t),\min\{u(t),x(t)\}\}\tag{5}$$

则

$$\begin{cases}P_{x,y}(u(t))=y(t),\ u(t)\leqslant y(t),\\ P_{x,y}(u(t))=x(t),\ u(t)\geqslant x(t),\\ y(t)\leqslant P_{x,y}(u(t))\leqslant x(t),\ u(t)\in X\end{cases}\tag{6}$$

显然，如果辅助问题(3)的解 u 满足当 $t\in[0,T]$ 时 $y(t)\leqslant u(t)\leqslant x(t)$，那么由式(3)至式(5)和问题(2)知问题(3)的解也为问题(2)的解. 故只需要证明问题(3)的解 u 满足 $y(t)\leqslant u(t)\leqslant x(t)$.

下面我们先证明当 $t\in[0,T]$ 时 $u(t)\leqslant x(t)$. 令 $\omega(t)=u(t)-x(t)$. 反设存在一个 $t^*\in[0,T]$ 使得 $\omega(t^*)>0$. 我们分下面三种情形讨论.

情形 1　$t^*\in(0,T)$ 使得 $\omega(t^*)=u(t^*)-x(t^*)>0$. 不失一般性，设 ω 在 $t=t^*$ 处取得最大值. 则 $u'(t^*)=x'(t^*)$. 另一方面，由定义 3.1 和(3)至(6)式可得

$$\begin{aligned}u'(t^*)&=a(t^*)u(t^*)-\lambda f^*(u(t^*))=\\ &a(t^*)u(t^*)-\lambda f(P_{x,y}(u(t)))+\\ &\lambda\arctan[u(t^*)-P_{x,y}(u(t^*))]\geqslant\\ &a(t^*)u(t^*)-\lambda f(x(t^*))+\\ &\lambda\arctan[u(t^*)-x(t^*)]\geqslant\\ &a(t^*)x(t^*)-\lambda f(x(t^*))+\\ &\lambda\arctan[u(t^*)-x(t^*)]\geqslant\\ &x'(t^*)+\lambda\arctan[u(t^*)-\\ &x(t^*)]>x'(t^*).\end{aligned}$$

这与 $u'(t^*)=x'(t^*)$ 矛盾.

情形 2　$t^*=0$. 则 $\omega(0)>0$ 且在 $t\in(0,T]$ 上 $\omega(t)\leqslant 0$. 另一方面，由定义 3.1 可知 $\omega(0)=u(0)-x(0)=u(T)-x(T)=\omega(T)\leqslant 0$. 这与 $\omega(0)>0$ 矛盾.

情形 3　$t^*=T$. 则 $\omega(T)>0$ 且在 $t\in[0,T)$ 上 $\omega(t)\leqslant 0$. 另一方面，由定义 3.1 可知 $\omega(T)=u(T)-x(T)=u(0)-x(0)=\omega(0)\leqslant 0$. 这与 $\omega(T)>0$ 矛盾. 故当 $t\in[0,T]$ 时 $u(t)\leqslant x(t)$. 同法可证得当 $t\in[0,T]$ 时 $u(t)\geqslant y(t)$. 引理得证.

4 主要结果的证明

定理 1.1 的证明　若 $q>0$，则

$$\beta(q)=\frac{\sigma}{1-\sigma}\min_{u\in K,\ \|u\|=q}\int_0^T f(u(s))\mathrm{d}s>0.$$

对任意的 $r_1>0$，取 $\delta_1=\dfrac{r_1}{\beta(r_1)}>0$ 并令

$$K_{r_1}=\{u\in K:\ \|u\|\leqslant r_1\}.$$

当 $\lambda>\delta_1$，$u\in\partial K_{r_1}$ 时，有

$$\begin{aligned}(T_\lambda u)(t)&=\lambda\int_0^T G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s>\\ &\delta_1\int_0^T G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\\ &\frac{\delta_1\sigma}{1-\sigma}\int_0^T f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\\ &\delta_1\beta(r_1)=r_1=\|u\|,\end{aligned}$$

即 $\|T_\lambda u\|>\|u\|$. 由引理 2.1 可得 $i(T_\lambda,K_{r_1},K)=0$. 由条件(H1)，$f_0=0$. 取 $0<r_2<r_1$，使得当 $0\leqslant u\leqslant r_2$ 时 $f(u)\leqslant\tilde{\varepsilon}u$，其中 $\tilde{\varepsilon}$ 适当选取满足 $0<\dfrac{\lambda\tilde{\varepsilon}T}{1-\sigma}<1$. 令 $K_{r_2}=\{u\in K:\ \|u\|<r_2\}$. 如果 $u\in\partial K_{r_2}$，则 $\sigma\|u\|\leqslant u(t)\leqslant r_2$. 从而

$$\begin{aligned}(T_\lambda u)(t)&=\lambda\int_0^T G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\\ &\lambda\tilde{\varepsilon}\int_0^T G(t,s)u(s)\mathrm{d}s\leqslant\\ &\frac{\lambda\tilde{\varepsilon}}{1-\sigma}\int_0^T u(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\lambda\tilde{\varepsilon}T}{1-\sigma}\|u\|<\|u\|,\end{aligned}$$

即 $\|T_\lambda u\|<\|u\|$. 由引理 2.1 得 $i(T_\lambda,K_{r_2},K)=1$. 由 $f_\infty=0$，故存在 $H>0$，使得当 $u\geqslant H$ 时 $f(u)\leqslant\mu u$. 选取 μ 足够小满足 $0<\dfrac{\lambda\mu T}{1-\sigma}<1$. 取 $r_3=\max\left\{2r_1,\dfrac{H}{\sigma}\right\}$. 令

$$K_{r_3}=\{u\in K:\ \|u\|<r_3\}.$$

如果 $u\in\partial K_{r_3}$，则 $u(t)\geqslant\sigma\|u\|\geqslant H$. 从而

$$\begin{aligned}(T_\lambda u)(t)&=\lambda\int_0^T G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\\ &\frac{\lambda}{1-\sigma}\int_0^T f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\\ &\frac{\lambda\mu}{1-\sigma}\int_0^T u(s)\mathrm{d}s\leqslant\\ &\frac{\lambda\mu T}{1-\sigma}\|u\|<\|u\|,\end{aligned}$$

即 $\|T_\lambda u\|<\|u\|$. 由引理 2.1 得 $i(T_\lambda,K_{r_3},K)=1$. 由不动点指数的可加性得

$i(T_\lambda, K_{r_1}\backslash \bar{K}_{r_2}, K)=-1,$

$i(T_\lambda, K_{r_3}\backslash \bar{K}_{r_1}, K)=1.$

因而 T_λ 在 $K_{r_1}\backslash \bar{K}_{r_2}$ 中有一个不动点 u_1，在 $K_{r_3}\backslash \bar{K}_{r_1}$ 中有一个不动点 u_2，且满足

$r_2<\|u_1\|<r_1<\|u_2\|<r_3.$

u_1, u_2 就是问题(2)的两个正解.

下面证明当 ε 充分小时正解不存在. 由 $f_\infty=0$ 知存在常数 $\bar{\varepsilon}>0$，使得当 $u\geqslant M$ 时 $f(u)\leqslant \bar{\varepsilon}u$，这里 M 的选取使得 $M>\sigma\|u\|$. 假设 $u\in X$ 为问题(2)的正解. 由引理 2.2 得 $u\in K$. 令 λ 充分小，满足 $\frac{\lambda\bar{\varepsilon}T}{1-\sigma}<1$. 则有

$$(T_\lambda u)(t)=\lambda\int_0^T G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant \frac{\lambda}{1-\sigma}\int_0^T f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant \frac{\lambda\bar{\varepsilon}}{1-\sigma}\int_0^T u(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\lambda\bar{\varepsilon}T}{1-\sigma}\|u\|,$$

即

$$\|u\|=\|T_\lambda u\|\leqslant\frac{\lambda\bar{\varepsilon}T}{1-\sigma}\|u\|<\|u\|.$$

矛盾. 定理得证.

下面我们将运用上下解和拓扑度的方法来证明定理 1.2. 为保证问题(2)的所有可能解都是非负的，我们对 f 做延拓使得

$$f(s)=f(0),\ s<0 \tag{7}$$

首先证明下面的引理.

引理 4.1　假设(H1)成立. 令 $I\subset(0,\infty)$ 是紧子集. 若 $\lambda\in I$，则存在一个常数 $b_I>0$ 使得问题(2)的所有解均满足 $\|u\|\leqslant b_I$.

证明　假设序列 $\{u_n\}$ 为无界序列且为问题(2)的解，相应的 λ_n 属于 $(0,\infty)$ 的有界闭集. 由引理 2.2，$u_n\in K$，即 $u_n(t)\geqslant\sigma\|u_n\|$. 由 $f_\infty=0$，存在常数 $q_1>0$ 使得 $f(u)\leqslant\bar{\mu}u$ 对所有 $u\geqslant q_1$ 都成立. 选取充分小的 $\bar{\mu}$ 满足

$$\sup\{\lambda_n\}\frac{\bar{\mu}T}{1-\sigma}<1.$$

选取 n 充分大使得 $\sigma\|u_n\|\geqslant q_1$. 则有

$$\|u_n\|=\|T_\lambda u_n\|\leqslant\frac{\lambda_n\bar{\mu}T}{1-\sigma}\|u_n\|<\|u_n\|,$$

矛盾. 引理得证.

现在令 Γ 表示问题(2)正解存在的 $\lambda>0$ 的集合. 由定理 1.1，Γ 非空且有界. 设 $\lambda^*=\inf\Gamma$. 从而有 $0<\lambda^*<\infty$. 下证 $\lambda^*\in\Gamma$.

首先，令 $\lambda_n\to\lambda^*$，其中 $\lambda_n\in\Gamma$，

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{n-1}>\lambda_n>\cdots>\lambda^*.$$

因为 $\{\lambda_n\}$ 有界，由引理 4.1，对应问题(2)的解 $\{u_n\}$ 有界. 由积分算子 T_λ 的紧性易得 $\lambda^*\in\Gamma$. 因此，当 $\lambda=\lambda^*$ 时，问题(2)至少有一个解存在. 令 u^* 为问题(2)对应 $\lambda=\lambda^*$ 的解.

引理 4.2　设(H1)成立. 令(λ,u_λ)为问题(2)满足 $\|u_\lambda\|\geqslant\|u^*\|$ 的解. 则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\|u_\lambda\|=\infty$.

证明　即证对于任意的 $n\in\mathbf{N}$，若存在序列$(\lambda_n,u_{\lambda_n})$为问题(2)的正解且 $\|u_{\lambda_n}\|\geqslant\|u^*\|$，则当 $\lambda>\lambda_n$ 时 $\|u_\lambda\|>n$ 成立. 令 $\partial K_n=\{u\in K: \|u\|=n\}$. 对任意的 $u_\lambda\in\partial K_n$，$\sigma n\leqslant u_\lambda\leqslant n$，由假设(H1)，$\inf\limits_{\sigma n\leqslant s\leqslant n}\frac{f(s)}{s}=c_0>0$. 则

$$u_\lambda(t)=\lambda\int_0^T G(t,s)f(u_\lambda(s))\mathrm{d}s=\lambda\int_0^T G(t,s)\frac{f(u_\lambda(s))}{u_\lambda(s)}u_\lambda(s)\mathrm{d}s>\frac{\lambda_n c_0\sigma^2 T}{1-\sigma}\|u_\lambda\|=\frac{\lambda_n c_0\sigma^2 T}{1-\sigma}n.$$

取 $\lambda_n=\max\left\{\frac{1-\sigma}{c_0\sigma^2 T},n\right\}$. 则当 $\lambda>\lambda_n$ 时 $\|u_\lambda\|>n$. 引理得证.

设 u^* 为问题(2)的解，对应的 λ 取 λ^*. 定义

$$\hat{f}(u(t))=\begin{cases} f(u^*(t)+\varepsilon),\ u(t)>u^*(t)+\varepsilon,\\ f(u(t)),\ -\varepsilon\leqslant u(t)\leqslant u^*(t)+\varepsilon,\\ f(-\varepsilon),\ u(t)<-\varepsilon.\end{cases}$$

令

$$(\hat{T}_\lambda u)(t)=\lambda\int_0^T G(t,s)\hat{f}(u(s))\mathrm{d}s.$$

考虑

$$\Omega=\{u\in X: -\varepsilon\leqslant u(t)\leqslant u^*(t)+\varepsilon\}.$$

引理 4.3　设(H1)成立. 则存在充分大的 $\varepsilon>0$，使得当 $\lambda>\lambda^*$ 时若 $u\in C[0,T]$ 满足 $\hat{T}_\lambda u=u$ 则 $u\in\bar{\Omega}$.

证明　因为 $u\geqslant0$，故 $u>-\varepsilon$. 为证明 $u\leqslant u^*+\varepsilon$，只需要证明 $u^*+\varepsilon$ 是问题(2)的上解. 当 $\lambda>\lambda^*$，ε 充分大时，由引理 4.2，$u^*+\varepsilon$ 的范数充分大且 $\|u^*+\varepsilon\|\geqslant\|u^*\|$. 令相应的 λ 取 $\bar{\lambda}$. 则

$$-(u^*(t)+\varepsilon)'+a(t)(u^*(t)+\varepsilon)=\bar{\lambda}f(u^*(t)+\varepsilon)>\lambda f(u^*(t)+\varepsilon),$$

且

$$(u^*+\varepsilon)(0)=(u^*+\varepsilon)(T).$$

由定义 3.1，$u^*+\varepsilon$ 为上解. 由引理 3.3，$u\leqslant u^*+\varepsilon$. 引理得证.

定理 1.2 的证明　令 $\lambda\in(\lambda^*,\infty)$. 下证问题

(2)至少存在两个正解. 显然，

$$-(u^*(t))'+a(t)u^*(t)=\lambda^* f(u^*(t))<\lambda f(u^*(t)),$$

u^* 是问题(2)的下解，而 $u^*+\varepsilon$ 是问题(2)的上解，由引理 3.3，存在问题(2)的解 u_λ 使得 $u^*\leqslant u_\lambda\leqslant u^*+\varepsilon$. 因此，当 $\lambda>\lambda^*$ 时，存在一个正解 u_λ 且 $u_\lambda\in\Omega$，而对于 $0<\lambda<\lambda^*$ 正解不存在.

选取 I 是$[\lambda^*-1,\infty)$上的任意闭区间，满足区间左端点是 λ^*-1. 则

$$(\lambda^*,\infty)\cap I\neq\varnothing,(0,\lambda^*)\cap I\neq\varnothing.$$

下证当 $\lambda\in(\lambda^*,\infty)\cap I$ 时问题(2)的第二个正解存在.

由于 $\lambda\in I$，$\hat{T}_\lambda$ 有界，故

$$\deg(I-\hat{T}_\lambda,B(u_\lambda,R),0)=1,$$

其中 $B(u_\lambda,R)$ 是 $C[0,T]$ 上的以 u_λ 为心，R 为半径足够大的球. 如果存在 $u\in\partial\Omega$，使得 $u=\hat{T}_\lambda(u)$，那么 $f=\hat{f}$. 因此 u 为第二个正解. 现假设对于所有 $u\in\partial\Omega$，$u\neq\hat{T}_\lambda u$，那么 $\deg(I-\hat{T}_\lambda,\Omega,0)$ 良定. 由引理 4.3，$\hat{T}_\lambda$ 在 $B(u_\lambda,R)\backslash\Omega$ 中没有不动点，由拓扑度的切除性，有

$$\deg(I-\hat{T}_\lambda,\Omega,0)=1.$$

又由 $\hat{T}_\lambda|_\Omega=T_\lambda|_\Omega$ 可得

$$\deg(I-T_\lambda,\Omega,0)=1.$$

另一方面，由引理 4.1，当 $\lambda\in I$ 时，问题(2)的所有正解都是有界的. 因此，当 L 足够大时有

$$\deg(I-T_\lambda,B(0,L),0)=m,$$

其中 $\lambda\in I$，m 为固定常数，$B(0,L)$是在 $C[0,T]$上以 0 为心，L 为半径的球. 由于对所有的 $0<\lambda<\lambda^*$，问题(2)正解不存在，所以 $m=0$. 再由拓扑度的切除性可得

$$\deg(I-T_\lambda,B(0,L)\backslash\Omega,0)=-1.$$

因此当 $\lambda\in(\lambda^*,\infty)\cap I$ 时问题(2)存在第二个正解. 定理得证.

参考文献：

[1] Graef J R, Kong L J. Periodic solutions of first order functional differential equations [J]. Appl Math Lett, 2011, 24: 1981.

[2] Wang H Y. Positive periodic solutions of functional differential equations [J]. J Diff Equat, 2004, 202: 354.

[3] Ma R Y, Chen R P, Chen T L. Existence of positive periodic solutions of nonlinear first-order delayed differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2011, 384: 527.

[4] Wu Y X. Existence of positive periodic solutions for a functional differential equation with a parameter [J]. Nonlinear Anal: Theor, 2008, 68: 1954.

[5] Zhang G, Cheng S S. Positive periodic solutions of non-autonomous functional differential equations depending on a parameter [J]. Abstr Appl Anal, 2002, 7: 279.

[6] Ma R Y, Zhang L. Construction of lower and upper solutions for first-order periodic problem [J]. Bound Value Probl, 2015, 190: 1.

[7] Christopher C T. Existence of solutions to first-order periodic boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2006, 323: 1325.

[8] Luo Y, Wang W B, Shen J H. Existence of positive periodic solutions for two kinds of neutral functional differential equations [J]. Appl Math Lett, 2008, 21: 581.

[9] Guo D J, Lakshmikanthan V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. New York: Academic Press, 1988.

[10] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京：北京大学出版社，1987.

[11] Graef J R, Kong L J. Existence of multiple periodic solutions for first order functional differential equations [J]. Math Comput Modelling, 2011, 54: 2962.

引用本文格式：

中　文：吴梦丽. 一类一阶周期边值问题多个正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：011004.

英　文：Wu M L. Existence of multiple positive solutions for a class of first-order periodic boundary value problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 011004.