一类一阶常微分系统周期边值问题正解的存在唯一性

何 婷
(西安电子科技大学数学与统计学院, 西安 710126)

摘 要: 本文研究了一阶常微分系统周期边值问题

$$\begin{cases} -u'(x)+a(x)u(x)=g(v(x)),\ 0<x<1, \\ -v'(x)+b(x)v(x)=f(u(x)),\ 0<x<1, \\ u(0)=u(1),\ v(0)=v(1) \end{cases}$$

的正解的存在唯一性,其中 $a,b\in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 $[0,1]$ 的任何子区间上不恒为 0, f,g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续, $f(0)\geqslant 0$, $g(0)\geqslant 0$ 且 $f(t)$, $g(t)$ 关于 $t\in[0,\infty)$ 单调递增. 主要结果的证明基于 Schauder 不动点定理和 Leray-Schauder 度理论.

关键词: 正解; 存在性; 唯一性; 一阶常微分周期系统
中图分类号: O175.8 **文献标识码**: A DOI: 10.19907/j.0490-6756.2022.021004

Existence and uniqueness of positive solutions for the periodic BVP of a class of first-order ordinary differential systems

HE Ting
(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, China)

Abstract: In this paper, we study the existence and uniqueness of positive solutions for the periodic boundary value problem of the following first-order ordinary differential equations:

$$\begin{cases} -u'(x)+a(x)u(x)=g(v(x)),\ 0<x<1, \\ -v'(x)+b(x)v(x)=f(u(x)),\ 0<x<1, \\ u(0)=u(1),\ v(0)=v(1), \end{cases}$$

where $a,b\in C([0,1],[0,\infty))$ do not vanish identically on any subinterval of $[0,1]$, f,g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ are continuous functions, $f(0)\geqslant 0$, $g(0)\geqslant 0$, and $f(t)$, $g(t)$ are nondecreasing on $[0,\infty)$. The proof of the main results are based on the Schauder fixed point theorem and the Leray-Schauder degree theory.

Keywords: Positive solution; Existence; Uniqueness; First-order ordinary periodic system
(2010 MSC 34B15)

1 引 言

本文研究如下一阶常微分系统

$$\begin{cases} -u'(x)+a(x)u(x)=g(v(x)),\ 0<x<1, \\ -v'(x)+b(x)v(x)=f(u(x)),\ 0<x<1, \\ u(0)=u(1),\ v(0)=v(1) \end{cases} \tag{1}$$

的周期边值问题的正解的的存在唯一性,其中 a, b: $[0,1]\to[0,\infty)$ 连续且在 $[0,1]$ 的任何子区间上

收稿日期: 2021-05-16
基金项目: 国家自然科学基金(12061064)
作者简介: 何婷(1997-), 女, 安徽怀宁人, 主要研究领域为泛函分析. E-mail: heting3522896862@163.com

不恒为 0，$f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续，$f(0)\geqslant 0$，$g(0)\geqslant 0$，且 $f(t)$，$g(t)$ 关于 $t\in[0,\infty)$ 是单调递增的.

近年来，一阶常微分方程(组)正解的存在性得到了广泛研究[1-9]. 其中，2001 年 Zhang 等[7]运用 Krasnoselskii 不动点定理，在一定条件下得到了问题

$$y'(t)=-a(t)y(t)+\lambda h(t)f(y(t-\tau(t))) \tag{2}$$

正周期解的存在性. 其中 $a(t)$，$h(t)$，$\tau(t)$ 是连续的 T-周期函数，$a(t)$，$h(t)$，$f(t)$ 非负，存在 $t_0\in[0,T]$ 使得 $a(t_0)>0$. 同时，诸多学者致力于研究相应于问题(2)的微分系统[10-12]，如 2012 年 Chen 等[11]讨论了问题

$$u_i{}'(t)=-a_i(t)u_i(t)+\lambda b_i(t)f_i(u),\ i=1,2,\dots,n \tag{3}$$

正周期解的存在性，其中 $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbf{R}^n$，得到如下结果：

定理 A　设

(i) $a_i,b_i\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 是 ω-周期函数且 $\int_0^\omega a_i(t)\mathrm{d}t>0$，$\int_0^\omega b_i(t)\mathrm{d}t>0$，$i=1,2,\dots,n$；

(ii) $f_i:\mathbf{R}_+^n\setminus\{0\}\to(0,\infty)$ 是连续函数，$i=1,2,\dots,n$；

(iii) 对于某些 $i=1,2,\dots,n$，$\lim\limits_{\|u\|\to 0}f_i(u)=\infty$；

(iv) $f_i(\infty):=\lim\limits_{\|u\|\to\infty}\dfrac{f_i(u)}{\|u\|}=\infty$，$i=1,2,\dots n$.

则存在正数 λ^*，使得当 $0<\lambda<\lambda^*$ 问题时(3)至少存在两个正周期解；当 $\lambda=\lambda^*$ 时问题至少存在一个正周期解；当 $\lambda>\lambda^*$ 时问题不存在正周期解.

然而，就我们所知，多数文献都只是研究了问题的正周期解的存在性、多解性及不存在性，而少有得到正解的唯一性. 一个自然的问题是：什么条件能保证一阶常微分系统(1)正解的存在性及唯一性？本文试图在 f 于 0 和 ∞ 处超线性(次线性)，g 于 0 和 ∞ 处次线性(超线性)条件下对研究问题(1)正解的存在性及唯一性进行探讨.

本文总假定：

(H1) $a,b:[0,1]\to[0,\infty)$ 连续且 a,b 在 $[0,1]$ 的任何子区间上不恒为 0；

(H2) $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续；

(H3) $f(0)\geqslant 0$，$g(0)\geqslant 0$，$f(t)$，$g(t)$ 关于 $t\in[0,\infty)$ 单调递增.

本文的主要结果如下：

定理 1.1　设(H1)～(H3)成立且

(H4) $\forall c>0$，$\lim\limits_{t\to 0^+}(g(cf(t))/t)=\infty$；

(H5) $\forall c>0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}(g(cf(t))/t)=0$.

则问题(1)至少有一个正解 $(u,v)\in(C^1[0,1])^2$.

定理 1.2　设(H1)～(H3)成立且

(H6) $f(t)$ 在 $t\in(-\infty,0]$ 单调递减；

(H7) $\forall c>0$，$\lim\limits_{t\to\infty}(f(cg(t))/t)=0$；

(H8) $f(0)>0$ 且 $g(t)>0$，$t>0$.

则问题(1)至少有一个正解 $(u,v)\in(C^1[0,1])^2$.

定理 1.3　设(H1)～(H3)成立且

(H9) 存在 $p,q>0$ 且 $pq<1$ 使得对任意 $\tau\in(0,1)$ 有 $f(\tau t)\geqslant\tau^p f(t)$ 及 $g(\tau t)\geqslant\tau^q g(t)$，$t>0$.

则问题(1)至多有一个正解 $(u,v)\in(C^1[0,1])^2$.

2　预备知识

引理 2.1[13]　设 $G_1(x,y)$，$G_2(x,y)$ 分别为边值问题

$$\begin{cases}-u'(x)+a(x)u(x)=0,\ 0<x<1,\\ u(0)=u(1)\end{cases} \tag{4}$$

和

$$\begin{cases}-v'(x)+b(x)v(x)=0,\ 0<x<1,\\ v(0)=v(1)\end{cases} \tag{5}$$

的格林函数. 计算可得

$$G_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\int_y^x a(\theta)\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{e}^{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta}-1},\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{e}^{\int_y^x a(\theta)\mathrm{d}\theta}}{1-\mathrm{e}^{-\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta}},\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}$$

$$G_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\int_y^x b(\theta)\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{e}^{\int_0^1 b(\theta)\mathrm{d}\theta}-1},\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{e}^{\int_y^x b(\theta)\mathrm{d}\theta}}{1-\mathrm{e}^{-\int_0^1 b(\theta)\mathrm{d}\theta}},\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

易见存在 $m,M>0$，使得

$$0<m\leqslant G_i(x,y)\leqslant M<\infty,\ i=1,2.$$

引理 2.2　设(H1)～(H3)及(H6)～(H7)成立. 则存在常数 $G>0$，使得对于 $\delta\in[0,1]$，问题

$$\begin{cases}-u'(x)+a(x)u(x)=\delta g(v(x)),\ 0<x<1,\\ -v'(x)+b(x)v(x)=\delta f(u(x)),\ 0<x<1,\\ u(0)=u(1),\ v(0)=v(1)\end{cases} \tag{6}$$

的所有解有

$$\max\{\|u\|_\infty,\|v\|_\infty\}\leqslant G,$$

其中 $\|u\|_\infty=\max\limits_{x\in[0,1]}|u(x)|$.

证明　由引理 2.1，问题(6)等价于如下积分方程组：

$$\begin{cases} u(x)=\delta\int_0^1 G_1(x,y)g(v(y))\mathrm{d}y,\ 0<x<1, \\ v(x)=\delta\int_0^1 G_2(x,y)f(u(y))\mathrm{d}y,\ 0<x<1 \end{cases} \tag{7}$$

设(u,v)是问题(6)的解. 根据假设(H3),(H6)和$G_i(x,y)>0,i=1,2$得$u,v\geqslant0$. 由假设(H7),存在$A>0$,使得

$$f(Mg(t))\leqslant\frac{t}{2M},\ t\geqslant A \tag{8}$$

如果$\|u\|_\infty\leqslant A$,

$$v(x)=\delta\int_0^1 G_2(x,y)f(u(y))\mathrm{d}y\leqslant f(A)\int_0^1 G_2(x,y)\mathrm{d}y\leqslant Mf(A),$$

则$\|v\|_\infty\leqslant Mf(A)$. 同理,如果$\|v\|_\infty\leqslant A$则$\|u\|_\infty\leqslant Mg(A)$. 若$\|u\|_\infty>A$, $\|v\|_\infty>A$则有

$$\|u\|_\infty\leqslant Mg(\|v\|_\infty) \tag{9}$$

和

$$\|v\|_\infty\leqslant Mf(\|u\|_\infty) \tag{10}$$

结合(8)～(10)式可得

$$\|v\|_\infty\leqslant Mf(Mg(\|v\|_\infty))<\frac{\|v\|_\infty}{2}.$$

所以$\|u\|_\infty>A$, $\|v\|_\infty>A$不成立. 综上,令

$$G=\max\{A,Mf(A),Mg(A)\}.$$

引理得证.

3　主要结果的证明

定理 1.1 的证明　根据假设(H4),一定存在$\alpha>0$满足$mg(mf(\alpha))\geqslant\alpha$. 根据假设(H5),一定存在$\beta>\alpha$满足$Mg(Mf(\beta))\leqslant\beta$. 令$X=C[0,1]$. 在范数$\|u\|_\infty=\max\limits_{x\in[0,1]}|u(x)|$下$X$为 Banach 空间. 令

$$Z=\{u\in C[0,1]:\alpha\leqslant u(x)\leqslant\beta,x\in[0,1]\}.$$

显然Z为X的有界闭凸集.

定义算子$T:Z\to X$,

$$Tu(x)=\int_0^1 G_1(x,y)g\left(\int_0^1 G_2(y,z)f(u(z))\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y,\quad x\in[0,1].$$

对于任意$u\in Z$,

$$\begin{aligned} Tu(x)=&\int_0^1 G_1(x,y)g\left(\int_0^1 G_2(y,z)f(u(z))\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\geqslant \\ &\int_0^1 G_1(x,y)g\left(f(\alpha)\int_0^1 G_2(y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\geqslant \\ &\int_0^1 G_1(x,y)g(mf(\alpha))\mathrm{d}y\geqslant \\ &mg(mf(\alpha))\geqslant\alpha. \end{aligned}$$

另一方面,又有

$$\begin{aligned} Tu(x)=&\int_0^1 G_1(x,y)g\left(\int_0^1 G_2(y,z)f(u(z))\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\leqslant \\ &\int_0^1 G_1(x,y)g\left(f(\beta)\int_0^1 G_2(y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\leqslant \\ &\int_0^1 G_1(x,y)g(Mf(\beta))\mathrm{d}y\leqslant \\ &Mg(Mf(\beta))\leqslant\beta. \end{aligned}$$

因此,$Tu\in Z$. 根据 Arzèla-Ascoli 定理,$T:X\to X$为全连续算子. 由 Schauder 不动点定理,至少存在一个$u\in X$满足$Tu=u$. 再令

$$v(x)=\int_0^1 G_2(x,y)f(u(y))\mathrm{d}y,\ x\in[0,1].$$

$v(x)\in C^1[0,1]$满足

$$\begin{cases} -v'(x)+b(x)v(x)=f(u(x)),\ 0<x<1, \\ v(0)=v(1). \end{cases}$$

从而$u(x)\in C^1[0,1]$满足

$$\begin{cases} -u'(x)+a(x)u(x)=g(v(x)),\ 0<x<1, \\ u(0)=u(1). \end{cases}$$

定理得证.

定理 1.2 的证明　设$Y=(C[0,1])^2$,其范数定义为$\|(u,v)\|=\max\{\|u\|_\infty,\|v\|_\infty\}$. 则问题(7)的解等价于积分方程

$$(u(x),v(x))=\delta\left(\int_0^1 G_1(x,y)g(v(y))\mathrm{d}y,\int_0^1 G_2(x,y)f(u(y))\mathrm{d}y\right)$$

的解$(u,v)\in Y$.

定义映射$L_\delta:Y\to Y$,

$$L_\delta(u,v)(x)=\delta\left(\int_0^1 G_1(x,y)g(v(y))\mathrm{d}y,\int_0^1 G_2(x,y)f(u(y))\mathrm{d}y\right).$$

显然,任意$\delta\in[0,1]$,L_δ是紧算子. 从而求解问题(1)等价于找映射L_1在Y中的一个不动点.

设B_G是Y上的一个球域,

$$B_G=\{(u,v)\in Y:\|(u,v)\|<G+1\}.$$

根据引理 2.2 可知,L_δ在边界∂B_G上没有不动点. 令$I:Y\to Y$为单位映射. 根据 Leray-Schauder 度的紧同伦不变性,任意$\delta\in[0,1]$,有

$$\begin{aligned} &\deg(I-L_1,B_G,0)=\deg(I-L_\delta,B_G,0)= \\ &\deg(I-L_0,B_G,0)=\deg(I,B_G,0)=1. \end{aligned}$$

则L_1在B_G内有一个不动点(u,v). 结合$G_i(x,y)>0$ $(i=1,2)$和假设(H2),(H3),(H6),(H8),有

$u(x), v(x)>0, \forall x \in[0,1]$. 证毕.

定理 1.3 的证明 设(u_j, v_j), $j=1,2$ 是问题(1)的两个正解. 定义

$$\Lambda=\{\lambda \in(0,1]: u_1-\theta u_2, v_1-\theta v_2 \geqslant 0, \\ x \in[0,1], \theta \in[0, \lambda]\} \tag{11}$$

显然, $\Lambda \neq \varnothing$. 令 $\tau=\sup \Lambda$ 并假设 $\tau<1$. 则对于 $x \in[0,1]$有

$$u_1(x)-\tau u_2(x) \geqslant 0, \; v_1(x)-\tau v_2(x) \geqslant 0.$$

由式(3)和假设(H2), (H9), 对于任意 $x \in[0,1]$有

$$u_1(x)=\int_0^1 G_1(x, y) g(v_1(y)) \mathrm{d} y \geqslant \\ \int_0^1 G_1(x, y) g(\tau v_2(y)) \mathrm{d} y \geqslant \\ \tau^q \int_0^1 G_1(x, y) g(v_2(y)) \mathrm{d} y=\tau^q u_2(x).$$

同理有 $v_1(x) \geqslant \tau^p v_2(x), x \in[0,1]$. 进而有

$$-(u_1(x)-\tau u_2(x))'+a(x)(u_1(x)-\tau u_2(x))= \\ g(v_1(x))-\tau g(v_2(x)) \geqslant(\tau^{pq}-\tau) g(v_2(x))$$

和

$$-(v_1(x)-\tau v_2(x))'+b(x)(v_1(x)-\tau v_2(x))= \\ f(u_1(x))-\tau f(u_2(x)) \geqslant \\ (\tau^{pq}-\tau) f(u_2(x)).$$

若对任意 $x \in(0,1)$有 $f(u_2(x)) \equiv 0, g(v_2(x)) \equiv 0$, 那么这与 $u_2(x), v_2(x)$是问题(1)的正解矛盾. 从而一定存在 $x_1, x_2 \in(0,1)$满足 $f(u_2(x_1))>0$, $g(v_2(x_2))>0$. 又因为 $\tau^{pq}-\tau>0$ 可以推出任意 $x \in(0,1)$,

$$u_1(x)-\tau u_2(x) \geqslant 0, \; v_1(x)-\tau v_2(x) \geqslant 0,$$

则存在 $\mu>\lambda$ 使得 $\mu \in \Lambda$. 这与 $\tau=\sup \Lambda$ 矛盾. 因此, $\tau=1$, 且对于任意 $x \in[0,1]$,

$$u_1(x)-u_2(x) \geqslant 0, \; v_1(x)-v_2(x) \geqslant 0.$$

同理, 对于任意 $x \in[0,1]$, 有

$$u_1(x)-u_2(x) \leqslant 0, \; v_1(x)-v_2(x) \leqslant 0.$$

从而 $u_1=u_2, v_1=v_2$. 定理得证.

4 主要定理的推广

当问题(1)变为

$$\begin{cases}-u'(x)+a(x) u(x)=g(x, v(x)), 0<x<1, \\ -v'(x)+b(x) v(x)=f(x, u(x)), 0<x<1, \\ u(0)=u(1), \; v(0)=v(1)\end{cases} \tag{12}$$

时, 同样也可以得到问题正解的存在性及唯一性, 即下面的条件结果.

假设

(H1′) $a, b:[0,1] \rightarrow[0, \infty)$ 连续且 a, b 在$[0,1]$的任何子区间上不恒为 0;

(H2′) $f, g:[0,1] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 连续;

(H3′) 对于任意 $x \in[0,1], f(x, 0), g(x, 0) \geqslant 0$, 且 $f(x, t), g(x, t)$关于 $t \in[0, \infty)$单调递增.

定义

$$\min_{x \in[0,1]} f(x, u)=h(u), \; \min_{x \in[0,1]} g(x, v)=k(v)$$

及

$$\max_{x \in[0,1]} f(x, u)=F(u), \; \max_{x \in[0,1]} g(x, v)=G(v).$$

定理 4.1 设(H1′)~(H3′)成立且

(H4′) $\forall c>0, \lim\limits_{t \rightarrow 0^+}(k(c h(t)) / t)=\infty$;

(H5′) $\forall c>0, \lim\limits_{t \rightarrow+\infty}(G(c F(t)) / t)=0$.

则问题(12)至少有一个正解$(u, v) \in(C^1[0,1])^2$.

定理 4.2 设(H1′)~(H3′)成立且

(H6′) 对于任意的 $x \in[0,1], f(x, t)$在 $t \in(-\infty, 0]$单调递减的;

(H7′) $\forall c>0, \lim\limits_{t \rightarrow+\infty}(F(c G(t)) / t)=0$;

(H8′) 存在 $x, y \in[0,1], f(x, 0)>0$ 且 $g(y, t)>0, t>0$.

则问题(12)至少有一个正解$(u, v) \in(C^1[0,1])^2$.

定理 4.3 设(H1′)~(H3′)成立且

(H9′) 存在 $p, q>0$ 且 $pq<1$ 使得对任意 $\tau \in(0,1)$有 $f(x, \tau t) \geqslant \tau^p f(x, t)$及

$$g(x, \tau t) \geqslant \tau^q g(x, t), t>0, x \in[0,1].$$

则问题(12)至多有一个正解$(u, v) \in(C^1[0,1])^2$.

定理 4.1 的证明 定义算子 $T': Z \rightarrow X$,

$$T' u(x)= \\ \int_0^1 G_1(x, y) g(y, \int_0^1 G_2(y, z) f(z, u(z)) \mathrm{d} z) \mathrm{d} y, \\ x \in[0,1].$$

对于任意 $u \in Z$, 有

$$T' u(x)=\int_0^1 G_1(x, y) \cdot \\ g(y, \int_0^1 G_2(y, z) f(z, u(z)) \mathrm{d} z) \mathrm{d} y \geqslant \\ \int_0^1 G_1(x, y) k(\int_0^1 G_2(y, z) h(u(z)) \mathrm{d} z) \mathrm{d} y \geqslant \\ \int_0^1 G_1(x, y) k(m h(\alpha)) \mathrm{d} y \geqslant \\ m k(m h(\alpha)) \geqslant \alpha.$$

另一方面, 有

$$T' u(x)=\int_0^1 G_1(x, y) \cdot \\ g(y, \int_0^1 G_2(y, z) f(z, u(z)) \mathrm{d} z) \mathrm{d} y \leqslant \\ \int_0^1 G_1(x, y) G(\int_0^1 G_2(y, z) F(v(z)) \mathrm{d} z) \mathrm{d} y \leqslant$$

$$\int_0^1 G_1(x,y)G(MF(\beta))\mathrm{d}y \leqslant MG(MF(\beta)) \leqslant \beta.$$

后面的证明与定理 1.1 的证明过程一样，略. 证毕.

定理 4.2 和定理 4.3 的证明分别与定理 1.2 和定理 1.3 的证明过程类似.

5 应　用

考虑方程组

$$\begin{cases} -u'(x)+\sin(\pi x)u(x)= \\ \quad (1+v^2(x))^{\frac{q}{2}},\ 0<x<1, \\ -v'(x)+\sin(\pi x)v(x)= \\ \quad (1+v^2(x))^{\frac{p}{2}},\ 0<x<1, \\ u(0)=u(1),\ v(0)=v(1), \end{cases}$$

其中 $0<p,\ q<1$. 则问题存在唯一正解.

容易验证假设(H1)～(H3)成立. 此外，$\forall c>0$，有

$$\lim_{u\to 0^+}(g(cf(u))/u)= \lim_{u\to 0^+}\frac{[1+(c\,(1+u^2)^{\frac{p}{2}})^2]^{\frac{q}{2}}}{u}= \lim_{u\to 0^+}\frac{[1+c^2\,(1+u^2)^p]^{\frac{q}{2}}}{u}=\infty.$$

从而假设(H4)成立，同理，假设(H5)成立. 另外，当 $\tau\in(0,1)$时，有

$$f(\tau u)=[1+(\tau u)^2]^{\frac{p}{2}}=[\tau^2(\frac{1}{\tau^2}+u^2)]^{\frac{p}{2}}= \tau^p\,(\frac{1}{\tau^2}+u^2)^{\frac{p}{2}}>\tau^p\,(1+u^2)^{\frac{p}{2}}=\tau^p f(u).$$

同理，当 $\tau\in(0,1)$时有 $g(\tau v)>\tau^p g(v)$. 假设(H9)成立. 因此，结合定理 1.1 和定理 1.3，问题存在唯一正解$(u,v)\in(C^1[0,1])^2$.

参考文献：

[1] Zhao A M, Bai Z G. Existence of solutions to first-order impulsive periodic boundary value problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 71: 1970.

[2] Peng S G. Positive solutions for first order periodic boundary value problem [J]. Appl Math Comput, 2004, 158: 345.

[3] Chen R P, Li X Y. Positive periodic solutions for nonlinear first-order delayed differential equations at resonance [J]. Bound Value Probl, 2018, 2018: 187.

[4] Sun Y, Han M A, Lokenath D. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations [J]. Appl Math Comput, 2007, 190: 699.

[5] Figueroa S R, Lopez P R. Existence of positive periodic solutions of nonlinear first-order differential equations [J]. Fixed Point Theory Appl, 2015, 2015: 220.

[6] Ma R Y, Chen R P, Chen T L. Existence of positive periodic solutions of nonlinear first-order differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2011, 384: 527.

[7] Cheng S S, Zhang G. Existence of positive periodic solutions for non-autonomous functional differential equations [J]. Electron J Differ Eq, 2001, 2001: 1.

[8] Kang S G, Shi B, Wang G Q. Existence of maximal and minimal periodic solutions for first-order functional differential equations [J]. Appl Math Lett, 2010, 23: 22.

[9] 苏肖肖. 一类一阶差分方程周期边值问题正解连通分支的振荡及无穷多个正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：231.

[10] Donal O, Wang H Y. Positive periodic solutions of systems of first order ordinary differential equations [J]. Results Math, 2005, 48: 310.

[11] Chen R P, Ma R Y, He Z Q. Positive periodic solutions of first-order singular systems [J]. Appl Math Comput, 2012, 218: 11421.

[12] Wang H Y. Positive periodic solutions of singular systems of first order ordinary differential equations [J]. Appl Math Comput, 2011, 218: 1605.

引用本文格式：

中　文：何婷. 一类一阶常微分系统周期边值问题正解的存在唯一性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：021004.

英　文：He T. Existence and uniqueness of positive solutions for the periodic BVP of a class of first-order ordinary differential systems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 021004.