一些特殊第二类 Stirling 数的 p-adic 赋值

吉庆兵[1,2]，卢 健[2]
(1. 西北工业大学网络空间安全学院，西安 710072；2. 中国电子科技集团公司第三十研究所，成都 610041)

摘 要：设 k 和 n 为非负整数. 第二类 Stirling 数表示将 n 个元素划分为恰好 k 个非空集合的个数，记为 $S(n,k)$. 对任意给定的素数 p 和正整数 n，存在惟一的整数 a 和 $m\geqslant 0$ 使得 $n=ap^m$，其中 $(a,p)=1$(a 与 p 互素). 称 m 为 n 的 p-adic 赋值，并记 $v_p(n)=m$. 第二类 Stirling 数的 p-adic 赋值是数论和代数拓扑领域的重要问题. 本文研究了一些特殊第二类 Stirling 数 $S(p^n,2^tp)$ 的 p-adic 赋值，其中 p 为奇素数，t 和 n 为正整数. 本文证明当 $n\geqslant 2$，$2\leqslant 2^t<p$ 时 $v_p(S(p^n,2^tp))\geqslant n+2-2^t$，推广了 Zhao 和 Qiu 最近的结果.

关键词：第二类 Stirling 数；p-adic 赋值；二项式
中图分类号：O156.2 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.011003

On the p-adic valuations of some special Stirling numbers of the second kind

JI Qing-Bing[1,2], *LU Jian*[2]
(1. College of Cyberspace Security, Northwest University of Technology, Xi'an 710072, China;
2. The 30th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Chengdu 610041, China)

Abstract: Let k and n be nonnegative integers. The Stirling number of the second kind is defined as the number of ways to partition a set of n elements into exactly k non-empty subsets, denoted by $S(n,k)$. Given a prime p and a positive integer n, there exist unique integers a and $m\geqslant 0$ with $(a,p)=1$ such that $n=ap^m$. The number m is called p-adic valuation of n, denoted by $v_p(n)=m$. The p-adic valuations of Stirling numbers of the second kind play a role in number theory and algebraic topology. In this paper, we study the p-adic valuations of the Stirling numbers of the second kind with the special form $S(p^n, 2^tp)$, where p is an odd prime, t and n are positive integers. We show that if $n\geqslant 2$ and $2\leqslant 2^t<p$, then $v_p(S(p^n,2^tp))\geqslant n+2-2^t$. This extends the results obtained by Zhao and Qiu recently.

Keywords: Stirling numbers of the second kind; p-adic valuations; Binomial coefficient

1 引 言

设 **N** 是非负整数集合. 定义在 **N** 上的第二类 Stirling 数表示将 n 个元素划分为恰好 k 个非空集合的个数，记为 $S(n,k)$，其中 k 和 n 为非负整数. 熟知，$S(n,k)$ 有如下的表达式

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n \tag{1}$$

其中 $\binom{k}{i}$ 为二项式系数，定义为

$$\binom{k}{i}=\frac{(k)_i}{i!}=\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}=\frac{k!}{i!\,(k-i)!},\quad k\geqslant i.$$

收稿日期：2021-06-23
基金项目：国家重点研发计划(2017YFB0802000)
作者简介：吉庆兵(1976－)，男，研究员，博士，主要从事加密流量分析及密码破译方向的研究. E-mail：jqbdxy@163.com
通讯作者：卢健. E-mail：lujian279@163.com

注意到 $S(n,k)$ 有如下的显性表达式

$$S(n,k) = \sum_{\substack{c_1+c_2+\cdots c_k=n-k \\ (c_1,c_2,\cdots,c_k)\in N^k}}^{k} 1^{c_1}2^{c_2}\cdots k^{c_k}.$$

同时, $S(n,k)$ 有生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n = \prod_{i=1}^{k}\frac{x}{1-ix}$$

以及如下的关系式

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)(x)_k$$

成立,其中 $(x)_k$ 为递降阶乘,对 $k\geqslant 1$, $(x)_k$ 定义为 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$, $(x)_0=1$. 此外,令 $S(0,0)=1$. 当 $n\geqslant 0$ 时, $S(n,0)=0$. 当 $n\geqslant k\geqslant 1$ 时, $S(n,k)$ 满足递推关系

$$S(n,k)=kS(n-1,k)+S(n-1,k-1).$$

正整数序列的整除性是数论等领域中十分有趣并且富有挑战性的课题. 其中,第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 的整除性问题在数论、组合论、代数拓扑等领域都得到了广泛研究. 对任意给定的素数 p 和正整数 n, 存在惟一的整数 m, 使得 $n=ap^m$, 其中 $(a,p)=1$. 我们称 m 为 n 的 p-adic 赋值, 并记 $v_p(n)=m$. p-adic 赋值是表示整除性常用的一种方式. 许多作者研究了第二类 Stirling 数的整除性, 包括 Davis 等[1], Hong 等[2] 和 Zhao 等[3-5]. 其中, Bendersky 和 Davis[6], Davis 等[7,8,1] 对一类 $S(n,k)$ 的 p-adic 赋值进行了深入研究, 给出了 $\min\{v_p(k!\ S(n,k)), 1\leqslant k\leqslant n\}$ 数值问题的一些结果, 并将其应用于代数拓扑的某些问题. Davis[9] 和 Clark[10] 利用 Hesel 引理建立了当 $k\leqslant 7$ 且 $n<2^{100}$ 时 $v_2(k!\ S(n,k))$ 的计算公式. 同时, Clark[10] 提出猜想: 设 p 为素数且 $n\geqslant k$, 则 $v_p(k!\ S(n,k))<n$. 2008 年, Amdeberhan 等[11] 从另一个角度分析了 $v_p(S(n,k))$ 的规律, 并给出了一些猜想. Hong 等[2] 证明了其中的两个猜想. 此外, Lengyel[12] 猜想并由 Wanemacker[13] 证明了一些特殊的第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 的 2-adic 赋值: $v_2(S(2^n,k))=s_2(k)-1$, 其中 $s_2(k)$ 为 k 的 2-adic 表示的指标和. Hong 等[2] 进一步证明 $v_2(S(2^n+1,k+1))=s_2(k)-1$ 对所有满足 $1\leqslant k\leqslant 2^n$ 的 k 成立. 更多关于 $S(n,k)$ 的 p-adic 赋值问题结果以及猜想, 参见文献[3-5].

最近, Zhao 和 Qiu[5] 研究了当 p 为奇素数时 $v_p(S(n,k))$ 的一些结果, 特别地, $v_p(S(p,2))\geqslant 1$; 当 $n\geqslant 2$ 时, $v_p(S(p^n,2p))\geqslant n$; 当 $n\geqslant 2$, $p\geqslant 5$ 时, $v_p(S(p^n,4p))\geqslant n-2$.

在本文中, 我们利用二项式系数的 p-adic 赋值得到了更一般的结果:

定理 1.1　设 p 为奇素数, t 和 n 为正整数且 $n\geqslant 2$, $2\leqslant 2^t<p$. 则 $v_p(S(p^n,2^tp))\geqslant n+2-2^t$.

2　预备知识

设 k 和 n 为非负整数. 令 $S(0,0)=1$. 当 $n>0$ 时, $S(n,0)=0$. 当 $k>0$ 时, $S(0,k)=0$. 显然, 当 $n<k$ 时 $S(n,k)=0$, $S(n,n)=1$.

根据式(1)易得 $S(n,1)=1$. 当 $n\geqslant 2$ 时, 有 $S(n,2)=2^{n-1}-1$.

熟知, 对 $n\neq 0$, $v_p(n)$ 为满足 $p^{v_p(n)}\parallel n$ 的唯一非负整数 ($\parallel$ 表示恰好整除). 定义 $v_p(0)=\infty$. 对任意两个整数 a 和 b, $v_p(ab)=v_p(a)+v_p(b)$. 对 $b\neq 0$, $v_p\left(\frac{a}{b}\right)=v_p(a)-v_p(b)$. 易得 $v_p(a+b)\geqslant \min\{v_p(a),v_p(b)\}$, 且若 $v_p(a)\neq v_p(b)$ 则有 $v_p(a+b)=\min\{v_p(a),v_p(b)\}$. 上述性质也被称为等腰三角形法则[14].

记 $s_p(n)$ 为 n 的 p-adic 表示(将 n 表示为以 p 为基底)的指标和. 关于二项式系数的 p-adic 赋值有如下结论.

引理 2.1[15]　设 p 为素数, k 和 n 为非负整数, 则有

$$v_p(n!)=\frac{n-s_p(n)}{p-1} \tag{2}$$

且对所有 $0\leqslant k\leqslant n$ 有

$$v_p\left(\binom{n}{k}\right)=\frac{s_p(k)+s_p(n-k)-s_p(n)}{p-1} \tag{3}$$

引理 2.2[5]　设 p 为奇素数, i, k 和 n 为正整数且满足 $1\leqslant k\leqslant p-1$, $1\leqslant i\leqslant kp-1$, $(i,p)=1$, 则有 $v_p((kp-1)^{p^n}+i^{p^n})=n+1$.

引理 2.3　设 p 为奇素数, j 和 t 为正整数且满足 $2\leqslant 2^t<p$, $1\leqslant j\leqslant 2^tp-1$, 则有

(i) 若 $p|j$, 则 $v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)=0$;

(ii) 若 $(j,p)=1$, 则 $v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)=1$.

证明　首先由式(3)可得

$$v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)=\frac{s_p(j)+s_p(2^tp-j)-s_p(2^tp)}{p-1} \tag{4}$$

情形 1: $p|j$. 由 $2\leqslant 2^t<p$ 可得 $1\leqslant \frac{j}{p}\leqslant 2^t-1$.

故 j 的 p-adic 唯一表示为 $j=\frac{j}{p}p$，且 2^tp-j 的 p-adic唯一表示为 $2^tp-j=(2^t-\frac{j}{p})p$，$1\leqslant 2^t-\frac{j}{p}\leqslant 2^t-1$. 则有 $s_p(j)=\frac{j}{p}$，$s_p(2^tp-j)=(2^t-\frac{j}{p})$，$s_p(2^tp)=2^t$. 故由式(4)计算可得

$$v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)=\frac{\frac{j}{p}+\left(2^t-\frac{j}{p}\right)-2^t}{p-1}=0.$$

情形 2：$(j,p)=1$. 由 $1\leqslant j\leqslant 2^tp-1$，$2\leqslant 2^t<p$可设 j 的 p-adic 唯一表示为 $j=a+bp$，其中 $1\leqslant a\leqslant p-1$，$0\leqslant b\leqslant p-1$,且由 $j\leqslant 2^tp-1$ 可得 $0\leqslant b\leqslant 2^t-1$. 故

$$\begin{aligned}2^tp-j&=2^tp-a-bp=\\&(p-a)+(2^t-1-b)p,\end{aligned}$$

其中 $1\leqslant p-a\leqslant p-1$ ，$0\leqslant(2^t-1-b)\leqslant(2^t-1)<p-1$，即

$$\begin{aligned}&s_p(j)=a+b,\\&s_p(2^tp-j)=(p-a)+(2^t-1-b)=\\&\quad 2^t+p-a-b-1,\\&s_p(2^tp)=2^t.\end{aligned}$$

则由式(4)计算可得

$$v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)=\frac{a+b+2^t+p-a-b-1-2^t}{p-1}=\frac{p-1}{p-1}=1.$$

引理得证.

3　主要结果的证明

定理 1.1 的证明　首先,根据式(2)可得

$$v_p((2^tp)!)=\frac{2^tp-s_p(2^tp)}{p-1}=\frac{2^tp-2^t}{p-1}=2^t.$$

其次,根据式(1)有

$$S(p^n,2^tp)=\frac{1}{(2^tp)!}\sum_{i=0}^{2^tp}(-1)^i\binom{2^tp}{i}(2^tp-i)^{p^n}=\sum_{i=0}^{2^tp}(-1)^i\frac{1}{(2^tp)!}\binom{2^tp}{i}(2^tp-i)^{p^n}=\sum_{i=0}^{2^tp}A_i,$$

其中 $A_i=(-1)^i\frac{1}{(2^tp)!}\binom{2^tp}{i}(2^tp-i)^{p^n}$. 由$(2,p)=1$ 可得

$$v_p(A_0)=v_p((2^tp)^{p^n})-v_p((2^tp)!)=p^n-2^t \tag{5}$$

对正整数 j，$1\leqslant j\leqslant 2^tp-1$，若 $p|j$，则由引理 2.3 之情形 1 可得 $v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)=0$. 从而

$$v_p(A_j)=v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)+v_p((2^tp-j)^{p^n})-v_p((2^tp)!)\geqslant p^n-2^t \tag{6}$$

对正整数 j，$1\leqslant j\leqslant 2^tp-1$，若$(j,p)=1$，$2\leqslant 2^t<p$,我们有

$$\begin{aligned}A_j+A_{2^tp-j}&=(-1)^j\frac{1}{(2^tp)!}\binom{2^tp}{j}(2^tp-j)^{p^n}+\\&(-1)^{2^tp-j}\frac{1}{(2^tp)!}\binom{2^tp}{2^tp-j}j^{p^n}=\\&(-1)^j\frac{1}{(2^tp)!}\binom{2^tp}{j}(2^tp-j)^{p^n}+\\&(-1)^{2^tp-j}\frac{1}{(2^tp)!}\binom{2^tp}{j}j^{p^n}=\\&(-1)^j\frac{1}{(2^tp)!}\binom{2^tp}{j}((2^tp-j)^{p^n}+j^{p^n}).\end{aligned}$$

由引理 2.2 可得

$$v_p((2^tp-j)^{p^n}+j^{p^n})=n+1.$$

又由引理 2.3 之情形 2 可得 $v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)=1$. 则

$$\begin{aligned}v_p(A_j+A_{2^tp-j})&=v_p\left(\binom{2^tp}{j}\right)+\\&v_p((2^tp-j)^{p^n}+j^{p^n})-v_p((2^tp)!)=\\&n+2-2^t\end{aligned} \tag{7}$$

故

$$S(p^n,2^tp)=A_0+\sum_{\substack{j=p\\p/j}}^{2^tp-p}A_j+\sum_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{2^tp-1}A_j=A_0+\sum_{\substack{j=p\\p/j}}^{2^tp-p}A_j+\sum_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{2^tp-1}(A_j+A_{2^tp-j}).$$

因此

$$\begin{aligned}&v_p(S(p^n,2^tp))\geqslant\\&\min\Big\{v_p(A_0),v_p(\sum_{\substack{j=p\\p/j}}^{2^tp-p}A_j),\\&v_p(\sum_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{2^tp-p}(A_j+A_{2^tp-j}))\Big\}.\end{aligned}$$

由式(5)可得 $v_p(A_0)=p^n-2^t$. 由式(6)可得

$$v_p(\sum_{\substack{j=p\\p/j}}^{2^tp-p}A_j)\geqslant p^n-2^t$$

由式(7)可得

$$v_p\Big(\sum_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{2^t p-p}(A_j+A_{2^t p-j})\Big)\geqslant n+2-2^t.$$

从而当 $n\geqslant 2$ 时有 $p^n>n+2$. 因此 $v_p(S(p^n,2^t p))\geqslant n+2-2^t$. 定理得证.

设 $t=1$，则由定理 1.1 有

推论 3.1　设 p 为奇素数,n 为正整数且 $n\geqslant 2$，则有 $v_p(S(p^n,2p))\geqslant n$.

设 $t=2$，由 $p\geqslant 2^t\geqslant 2$，利用定理 1.1 可得 $v_p(S(p^n,4p))\geqslant n+2-2^2=n-2$,即

推论 3.2　设 p 为奇素数，n 为正整数且 $n\geqslant 2$，$p\geqslant 5$. 则 $v_p(S(p^n,4p))\geqslant n-2$.

注　推论 3.1 即为文献[5]中定理 1.2,推论 3.2 即为文献[5]中定理 1.3.

参考文献:

[1] Davis D, Potocka K. 2-primary v_1-periodic homotopy groups of $SU(n)$ revisited [J]. Forum Math, 2007, 19: 783.

[2] Hong S F, Zhao J R, Zhao W. The 2-adic valuations of Stirling numbers of the second kind [J]. Int J Number Theory, 2012, 8: 1057.

[3] Zhao J R, Hong S F, Zhao W. Divisibility by 2 of Stirling numbers of the second kind and their differences [J]. J Number Theory, 2014, 140: 324.

[4] Zhao W, Zhao J R, Hong S F. The 2-adic valuations of differences of Stirling numbers of the second kind [J]. J Number Theory, 2015, 153: 309.

[5] Zhao W, Qiu M. Some new results on the p-adic valuations of Stirling numbers of the second kind [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 865.

[6] Bendersky M, Davis D M. 2-primary v_1-periodic homotopy groups of $SU(n)$ [J]. Amer J Math, 1991, 114: 529.

[7] Davis D M. v_1-periodic homotopy groups of $SU(n)$ at odd primes [J]. Proc London Math Soc, 1991, 43: 529.

[8] Davis D M. Divisibility by 2 and 3 of certain Stirling numbers [J]. Integers, 2008, 8: A56.

[9] Davis D M. Divisibility by 2 of Striling-like numbers [J]. Proc Amer Math Soc, 1990, 1: 597.

[10] Clarke F. Hensel's lemma and the divisibility by primes of Stirling-like numbers [J]. J Number Theory, 1995, 52: 69.

[11] Amdeberhan T, Manna D, Moll V. The 2-adic valuation of Stirling numbers [J]. Exper Math, 2008, 17: 69.

[12] Lengyel T. On the divisibility by 2 of Stirling numbers of the second kind [J]. Fibonacci Quart, 1994, 32: 194.

[13] Wannermacker S D. On 2-adic orders of Stirling numbers of the second kind [J]. Integers, 2005, 5: A21.

[14] Koblitz N. p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions [M]. New York: Springer-Verlag, 1984.

[15] Boros G, Moll V. Irresistible integrals [M]. New York: Cambridge University Press, 2004.

引用本文格式:

中　文: 吉庆兵, 卢健. 一些特殊第二类 Stirling 数的 p-adic 赋值[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2022, 59: 011003.

英　文: Ji Q B, Lu J. On the p-adic valuations of some special Stirling numbers of the second kind [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 011003.