2022 年 11 月 四川大学学报(自然科学版) Nov. 2022
第 59 卷 第 6 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 59 No. 6

带乘性 Lévy 噪声的随机 Cahn-Hilliard 方程的中偏差原理

王 颖，陈光淦，汪 品
(四川师范大学数学科学学院/可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室，成都 610068)

摘 要：中偏差原理是统计推断理论中构建渐近置信区间的重要依据之一. 本文旨在研究带乘性 Lévy 噪声的随机 Cahn-Hilliard 方程的中偏差原理. 在该方程中，带跳噪声和高阶非线性项的耦合导致随机积分的计算较为复杂，不易获得指数型概率估计. 本文运用经典弱收敛方法逐一验证了两个中偏差条件，进而建立了方程的中偏差原理.

关键词：中偏差原理；随机 Cahn-Hilliard 方程；泊松随机测度；弱收敛准则
中图分类号：O175.2 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.061003

Moderate deviation principle for stochastic Cahn-Hilliard equations with multiplicative Lévy noise

WANG Ying, *CHEN Guang-Gan*, *WANG Pin*
(School of Mathematical Sciences/V. C. & V. R. Key Lab, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

Abstract: Moderate deviation principle is an important method for constructing asymptotic confidence intervals in statistical inference. This work aims at the moderate deviation principle for the stochastic Cahn-Hilliard equations driven by multiplicative Lévy noise. In these equations, the interaction of high order nonlinear terms and jump noises results in the difficulty of dealing with the stochastic integrals and deducing the exponential-type probability estimates. With the help of classical weak convergence method, we establish the moderate deviation principle underlying the verification of two moderate deviation conditions.

Keywords: Moderate deviation principle; Stochastic Cahn-Hilliard equation; Poisson random measure; Weak convergence criteria
(2010 MSC 60H15, 35R60, 37L55)

1 引 言

随机 Cahn-Hilliard 方程是材料科学和流体力学中的一类重要数学模型，该方程可被用于描述二元合金的调幅分解，生物种群的竞争与排斥，固体表面上微滴的扩散及河床的迁移过程等，应用广泛[1]. 本文考虑如下由乘性 Lévy 噪声驱动的随机 Cahn-Hilliard 方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t,x) = -\Delta^2 u^{\varepsilon}(t,x) + \Delta f(u^{\varepsilon}(t,x)) + \\ \quad \varepsilon\displaystyle\int_{\mathbb{X}} \sigma(u^{\varepsilon}(t-,x),z)\, \dot{\tilde{N}}^{\varepsilon^{-1}}(t,x,\mathrm{d}z), \\ \quad (t,x) \in [0,T]\times V, \\ u^{\varepsilon}(0,x) = u_0(x),\ x\in V, \\ \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}}(t,x) = \dfrac{\partial \Delta u^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}}(t,x) = 0, (t,x)\in[0,T]\times\partial V \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2021-08-23
基金项目：国家自然科学基金 (12171343)；四川省科技计划项目(2022JDTD0019)
作者简介：王颖(1997－)，女，江苏徐州人，硕士研究生，主要研究领域为随机偏微分方程. E-mail：mathwangying@hotmail.com

其中 $V=[0,\pi]^d$，$d=1,2,3$，$\boldsymbol{n}$ 为∂V 上的外法向量，Δ为 Laplace 算子. 此外，多项式 f 是首项系数为正的 3 次多项式，参数 ε 满足 $0<\varepsilon\ll 1$，$\mathbb{X}$为局部紧的 Polish 空间，σ 为可测映射，$\dot{\widetilde{N}}^{\varepsilon^{-1}}$ 表示随机测度$\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}}$ 的 Radon-Nikodym 导数，Lévy 噪声及其补偿的定义见后文.

Cahn-Hilliard 方程由 Cahn 和 Hilliard[2] 在 1958 年提出，用于描述热力学中两相物质间的相互扩散. 作为一类经典 4 阶非线性扩散方程，该方程在随机偏微分方程研究领域里广受关注[3]，如 Da Prato 和 Debussche[1] 研究了由加性白噪声驱动的随机 Cahn-Hilliard 方程解的适定性，得到了不变测度的存在唯一性；Cardon-Weber[4] 进一步将适定性推广到带非线性高斯噪声的 Cahn-Hilliard 方程，建立了解的分布密度函数性质；Bo 等[5] 通过弱收敛方法得到了分数阶噪声驱动的随机 Cahn-Hilliard 方程全局解的存在唯一性；Goudenège 和 Manca[6] 讨论了带退化噪声的随机 Cahn-Hilliard 方程的遍历性和不变测度，等.

本文主要关注纯带跳噪声对 Cahn-Hilliard 方程的影响. 纯带跳噪声是一种典型的随机扰动，可被用于描述低频或罕见事件. 关于此类噪声对于 Cahn-Hilliard 方程的影响已有不少研究，如 Wu 和 Xie[7] 基于类稳定 Markov 算子基本解的估计建立了由纯跳跃 Lévy 时空白噪声驱动的随机分数阶 Burgers 型非线性方程局部解的存在唯一性；Bo 和 Wang[8] 运用一类新的 Burkholder-Davis-Gundy 不等式证明了在 Neumann 边界条件下带 Lévy 时空白噪声的随机 Cahn-Hilliard 方程局部解的适定性；Guo 等[3] 在此基础上进行优化得到了此类方程全局解的存在唯一性，等.

大偏差原理主要研究罕见事件发生的概率为指数型的估计，在热力学，统计学，随机动力学等领域都有重要应用[9-12]. 中偏差是介于中心极限和大偏差之间的一种估计. 与大偏差原理一样，中偏差原理也来源于统计推断的需要，可以提供复杂随机模型的定性和定量信息. 例如，在满足中偏差原理的情况下，我们可以使用速率函数来确定污染源与导致特定结果（如超过允许浓度）的水路动态系统之间最有可能的相互作用. 此外，在统计理论中中偏差原理可以提供收敛速度和构建渐近置信区间的有效方法[12-15]，有广阔的发展前景，受到了学者们的广泛关注，如 Belfadli 等[13] 运用弱收敛和紧分析方法得到了时空高斯噪声扰动下的随机 Burgers 方程解的中心极限和中偏差估计；Cheng 等[14] 讨论了$[0,T]\times\mathbf{R}^3$ 上一类随机波动方程的中心极限定理与中偏差原理；Li 和 Wang[15] 利用弱收敛判断准则建立了 Hölder 空间下由维纳噪声驱动的随机 Cahn-Hilliard 方程的中心极限定理和中偏差原理，等.

在充分小的奇异扰动影响下，本文研究带乘性 Lévy 噪声的随机 Cahn-Hilliard 方程的中偏差原理，刻画其与下述极限系统（2）的渐近性质，提供了与小噪声随机动力系统（1）相关的小概率指数衰减. 当参数 $\varepsilon\to 0$ 时，方程(1)的解u^ε收敛到如下方程的解u^0：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^0}{\partial t}(t,x)=-\Delta^2 u^0(t,x)+\Delta f(u^0(t,x)),\\ \quad (t,x)\in[0,T]\times V,\\ u^0(0,x)=u_0(x),\ x\in V,\\ \dfrac{\partial u^0}{\partial \boldsymbol{n}}(t,x)=\dfrac{\partial \Delta u^0}{\partial \boldsymbol{n}}(t,x)=0,\\ \quad (t,x)\in[0,T]\times\partial V\end{cases} \tag{2}$$

本文主要考虑由乘性 Lévy 噪声驱动的随机 Cahn-Hilliard 方程(1)的中偏差原理，即考虑随机变量

$$\hat{Y}^\varepsilon=(u^\varepsilon-u^0)/a(\varepsilon) \tag{3}$$

的大偏差原理，其中的偏差尺度 $a(\varepsilon)$满足

$$a(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon/a^2(\varepsilon)\to 0,\ \text{当}\ \varepsilon\to 0\ \text{时} \tag{4}$$

在一定的偏差条件（4）下，此类特殊的大偏差原理被称作所谓的中偏差原理[11]. 在方程(1)中，纯跳跃 Lévy 噪声和非线性项 Δf 的耦合作用使问题变得复杂. 推导方程（1)的中偏差原理主要存在以下两个难点：(i) 系统受 Lévy 噪声扰动，其偏差理论研究中所需的概率估计不易获取；(ii) 因高阶非线性项 Δf 的出现，系统中关于算子$\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta^2$的 Green 核函数不具有良好的正则性. 对于(i)，我们借鉴 Budhiraja 等[16] 提出的弱收敛方法，运用极大值不等式克服了带跳噪声带来的困难. 对于(ii)，我们对 Green 核函数建立了一些新的正则性结果[15]，克服了非线性项估计带来的困难，从而最终建立方程(1) 的中偏差原理.

在本文中，我们约定$C_T,C_{T,\gamma},C_{T,p,R},\cdots$是与参数 T,γ,p,R 相关而与参数ε 无关的正常数，它们在每一行中的取值可能不同.

本文结构如下，第 2 节给出空间及噪声设置，并引进一些假设和估计，给出方程（1）解的存在

唯一性结果. 第 3 节讨论中偏差条件及其证明. 中偏差原理及其证明在第 4 节建立.

2　预备知识

2.1　函数空间

令$W^{k,p}(V)$为 Sobolev 空间. 记$L^p(V)=W^{0,p}(V)$,范数为$\|\cdot\|_p$，其中 $p\geqslant 1$. 对任意 $T>0$, $p\geqslant 4$, $\alpha\in(0,1)$，令$C^\alpha([0,T],L^p(V))$为 α 阶 Hölder 空间，赋以范数

$$\|u\|_{\alpha,p}:=\sup_{t\in[0,T]}\|u(t,\cdot)\|_p+\sup_{\substack{t\neq s\\ t,s\in[0,T]}}\frac{\|u(t,\cdot)-u(s,\cdot)\|_p}{|t-s|^\alpha}.$$

考虑一个从$C^\alpha([0,T];\mathbf{R})$到$C^\alpha([0,T],L^p(V))$的等距映射

$$I:|V|^{-\frac{1}{p}}f\mapsto F_f,\ F_f(t,x)=f(t),$$
$$\forall f\in C^\alpha([0,T];\mathbf{R}),t\in[0,T],x\in V.$$

因空间$C^\alpha([0,T];\mathbf{R})$不可分，根据拓扑同构得空间$C^\alpha([0,T],L^p(V))$不具可分性（参见文献[9]). 此时,考虑如下 Polish 空间：

$$E^\alpha\triangleq\{u\in C^\alpha([0,T],L^p(V)):\lim_{\delta\to 0}\sup_{|t-s|<\delta}\frac{\|u(t,\cdot)-u(s,\cdot)\|_p}{|t-s|^\alpha}=0\}.$$

令 $D([0,T],L^p(V))$为$[0,T]$上具有左极限并且右连续的$L^p(V)$-值函数构成的全体，赋以范数

$$\|u\|_{D([0,T],L^p(V))}=\sup_{t\in[0,T]}(\mathbb{E}(\|u(t,\cdot)\|_p^p))^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

显然,$D([0,T],L^p(V))$是 Banach 空间.

2.2　Lévy 噪声

设 $V=[0,\pi]^d$，其中 $d\in\{1,2,3\}$. 令$\mathbb{X}$为局部紧的 Polish 空间. 显然$\mathbb{H}:=V\times\mathbb{X}$为局部紧的 Polish 空间. 令 $M(\mathbb{H})$为$(\mathbb{H},B(\mathbb{H}))$上所有测度 ν 构成的空间，并使$\mathbb{H}$中任意的紧子集 O 满足 $\nu(O)<\infty$，其中 $B(\mathbb{H})$表示 $M(\mathbb{H})$的 Borel σ-域. 设$C_c(\mathbb{H})$为$\mathbb{H}$上具有紧支集的连续函数构成的全体. 赋予 $M(\mathbb{H})$最弱拓扑使得映射

$$\nu\to\langle g,\nu\rangle=\int_{\mathbb{H}}g(u)\mathrm{d}\nu(u)$$

为连续函数，其中 $g\in C_c(\mathbb{H})$, $\nu\in M(\mathbb{H})$. 此拓扑可测，并且 $M(\mathbb{H})$为 Polish 空间.

给定 $T>0$. 令$\mathbb{H}_T=[0,T]\times\mathbb{H}$, $\nu_T=\lambda_T\otimes\nu$，其中$\lambda_T$为$[0,T]$上的 Lebesgue 测度，$\nu=\lambda_\pi\otimes\vartheta\in M(\mathbb{H})$, λ_π为 V 上的 Lebesgue 测度，$\vartheta\in M(\mathbb{X})$. 显然，$\mathbb{M}:=M(\mathbb{H}_T)$为 Polish 空间. 定义 $N:\mathbb{M}\to\mathbb{M}$, $N(m):=m$ 是一个带有测度强度为ν_T的 Poisson 随机测度. 对于 $\theta>0$, $\mathbb{P}_\theta$为$(\mathbb{M},B(\mathbb{M}))$上唯一概率测度，使得 N 是带有测度强度$\theta\nu_T$的 Poisson 随机测度. 特别地，当 $\theta=1$ 时记$\mathbb{P}_1=\mathbb{P}$.

记$\mathbb{U}=\mathbb{H}\times[0,\infty)$, $\mathbb{U}_T=[0,T]\times\mathbb{U}$, $\bar{\mathbb{M}}=M(\mathbb{U}_T)$. 定义$\bar{N}:\bar{\mathbb{M}}\to\bar{\mathbb{M}}$, $\bar{N}(\bar{m}):=\bar{m}$是一个带有测度强度为$\bar{\nu}_T$的 Poisson 随机测度，其中$\bar{\nu}_T=\nu_T\otimes\lambda_\infty$, λ_∞为$[0,\infty)$上的 Lebesgue 测度. 记 $\bar{\mathbb{P}}$为$(\bar{\mathbb{M}},B(\bar{\mathbb{M}}))$上唯一概率测度,使得$\bar{N}$是带有测度强度$\bar{\nu}_T$的 Poisson 随机测度，

$$F_t=\sigma\{\bar{N}((0,s]\times U)\mid 0\leqslant s<t,U\in B(\mathbb{U})\},$$

并记$\bar{F}_t$为F_t的完备化. 令$\bar{P}$为$[0,T]\times\bar{\mathbb{M}}$上的可料 σ-域. 令 $\bar{A}_+$ 为$(\bar{P}\otimes B(\mathbb{H}))/B[0,\infty)$-可测映射 $\varphi:\mathbb{H}_T\times\bar{\mathbb{M}}\to[0,\infty)$构成的全体. $\bar{A}$为$(\bar{P}\otimes B(\mathbb{H}))/B(\mathbf{R})$-可测映射 $\varphi:\mathbb{H}_T\times\bar{\mathbb{M}}\to\mathbf{R}$ 构成的全体. 对于 $\varphi\in\bar{A}_+$，定义$\mathbb{H}_T$上可数过程

$$N^\varphi((0,t]\times O)=\int_{(0,t]\times O}\int_{(0,\infty)}1_{[0,\varphi(l,s)]}(r)\ \bar{N}(\mathrm{d}s\mathrm{d}l\mathrm{d}r),$$
$$t\in[0,T],O\in B(\mathbb{H}),$$

这里N^φ是控制随机测度，其中的 φ 选择为在点(l,s)处的强度.

当 $\varphi(s,l,\bar{m})\equiv\theta\in(0,\infty)$时，记$N^\varphi=N^\theta$，这里$N^\theta$相应于$\bar{\mathbb{P}}$和 N 相应于$\mathbb{P}_\theta$具有相同分布. 特别地，取 $\theta=\varepsilon^{-1}$. 则 $\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}}$ 为随机测度 $N^{\varepsilon^{-1}}$ 的补偿 Poisson 随机测度，即对任意 $A\in B(V)$, $\beta\in B(\mathbb{X})$且$\lambda_\pi(A)$, $\vartheta(\beta)<\infty$，有

$$\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}}([0,t]\times A\times\beta)=N^{\varepsilon^{-1}}([0,t]\times A\times\beta)-\varepsilon^{-1}t\lambda_\pi(A)\vartheta(\beta).$$

$\dot{\widetilde{N}}^{\varepsilon^{-1}}$为随机测度$\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}}$的 Radon-Nikodym 导数，即对任意$(t,x,z)\in[0,T]\times V\times\mathbb{X}$有

$$\dot{\widetilde{N}}^{\varepsilon^{-1}}(t,x,\mathrm{d}z)=\frac{\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}z)}{\mathrm{d}t\times\mathrm{d}x}.$$

定义 $\xi:[0,\infty)\to[0,\infty)$使得

$$\xi(r)=r\log r-r+1,r\in[0,\infty).$$

任意 $\varphi\in\bar{A}_+$,定义

$$L_T(\varphi):=\int_{\mathbb{H}_T}\xi(\varphi(t,l,\omega))\,\nu_T(\mathrm{d}t\mathrm{d}l),t\in[0,T].$$

设$\{E_n\subset\mathbb{H},n=1,2,\cdots\}$为一列递增紧集，使得$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\mathbb{X}$. 对任意 n，令

$$\bar{A}_{b,n}=\{\varphi\in\bar{A}_+:\forall(t,\omega)\in[0,T]\times\bar{\mathbb{M}},$$
$$n\geqslant\varphi(t,l,\omega)\geqslant 1/n,\text{当 }l\in E_n;\varphi(t,l,\omega)=1$$

当 $l\in E_n^c\}$

且 $\bar{A}_b=\cup_{n=1}^{\infty}\bar{A}_{b,n}$.

设 $\{G^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ 为从 $\mathbb{M}$ 到 $D([0,T],L^p(V))$ 的可测映射，且 $a(\varepsilon)$ 满足式(4). 对于 $\varepsilon>0,M<\infty$，令

$$S_{+,\varepsilon}^M=\{\varphi:\mathbb{H}\times[0,T]\to\mathbf{R}_+\mid L_T(\varphi)\leqslant Ma^2(\varepsilon)\},$$

$$S_{\varepsilon}^M=\{\psi:\mathbb{H}\times[0,T]\to\mathbf{R}\mid \psi=(\varphi-1)/a(\varepsilon),\ \varphi\in S_{+,\varepsilon}^M\},$$

$$U_{+,\varepsilon}^M=\{\varphi\in\bar{A}_b\mid \varphi(\cdot,\cdot,\omega)\in S_{+,\varepsilon}^M,\bar{\mathbb{P}}\text{-a. s.}\},$$

$$U_{\varepsilon}^M=\{\psi\in\bar{A}\mid \psi(\cdot,\cdot,\omega)\in S_{\varepsilon}^M,\bar{\mathbb{P}}\text{-a. s.}\}.$$

记 Hilbert 空间 $L^2(\nu_T)$ 的范数为 $\|\cdot\|_2$. 令 $B_2(R)$ 是 $L^2(\nu_T)$ 中半径为 R 的球，并将 $B_2(R)$ 视作 $L^2(\nu_T)$ 上赋予弱拓扑而得到的紧度量空间. 设 $\varphi\in S_{+,\varepsilon}^M$，由文献 [16,引理 3.2]知，存在独立于 ε 的 $\kappa_2(1)\in(0,\infty)$，使得 $\psi 1_{\{|\psi|\leqslant\frac{1}{a(\varepsilon)}\}}\in B_2(\sqrt{M\kappa_2(1)})$，其中 $\psi=(\varphi-1)/a(\varepsilon)$.

2.3　相关引理

令

$$K=\{\chi:\mathbb{H}\to\mathbf{R}\mid \exists\delta>0,\ \text{s. t.}\ \forall\Gamma,\vartheta(\Gamma)<\infty,\int_{\Gamma}\exp(\delta\chi^2(l))\nu(dl)<\infty\}.$$

假设映射 $\sigma:L^p(V)\times\mathbb{H}\to L^p(V)$ 可测，且方程 (1) 中的非线性项 f 以及初值 u_0 满足如下假设：

($\mathbf{H}_1$) 对于 $L_\sigma,M_\sigma\in L^2(\nu)\cap K$，有

$$\|\sigma(x_1,l)-\sigma(x_2,l)\|_p\leqslant L_\sigma(l)\|x_1-x_2\|_p,\ x_1,x_2\in L^p(V),l\in\mathbb{H}\tag{5}$$

$$\|\sigma(x,l)\|_p\leqslant M_\sigma(l)(1+\|x\|_p),x\in L^p(V),\ l\in\mathbb{H}\tag{6}$$

($\mathbf{H}_2$) f 是首项系数为正的 3 次多项式;

($\mathbf{H}_3$) 初值 u_0 满足 γ_0 阶 Hölder 连续，其中 $\gamma_0\in(0,1)$.

由文献[8]知,方程(1)在 Neumann 边界下存在如下形式的温和解:

$$u^{\varepsilon}(t,x)=\int_V G_t(x,y)\,u_0(y)\mathrm{d}y+\int_0^t\int_V\Delta G_{t-s}(x,y)f(u^{\varepsilon}(s,y))\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\varepsilon\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\sigma(u^{\varepsilon}(s-,y),z)\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}}(\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s)\tag{7}$$

同样，方程(2)在 Neumann 边界下存在如下形式的温和解:

$$u^0(t,x)=\int_V G_t(x,y)\,u_0(y)dy+\int_0^t\int_V\Delta G_{t-s}(x,y)f(u^0(s,y))\mathrm{d}y\mathrm{d}s\tag{8}$$

其中 $G_t(\cdot,\cdot)$ 为关于算子 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta^2$ 的 Green 核函数.

引理 2.1[15]　定义

$$B(v)(t_1,t_2,x):=\int_{t_1}^{t_2}\int_V\Delta G_{t-s}(x,y)v(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

其中 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$. 则

(i) 对任意 $t\in[0,T],x\in V$，存在正常数 $C>0$，使得

$$\int_V|G_t(x,y)|^2\mathrm{d}y\leqslant Ct^{-\frac{4}{d}}\tag{9}$$

(ii) 对任意 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T,x\in V$，存在正常数 $C>0$，使得

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V|G_{t-s}(x,y)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\leqslant C|t_2-t_1|^{\gamma},\ \gamma<1-\frac{d}{4}\tag{10}$$

(iii) 设 $\beta,\rho\in[1,\infty),p\in[\rho,\infty)$,

$$k=\frac{1}{p}-\frac{1}{\rho}+1\in[0,1],$$

并且 $\frac{1}{k}\neq\infty$，当 $d=2$; $\frac{1}{k}<3$，当 $d=3$. 对于 $v\in L^{\beta}([0,T],L^p(V))$, $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$, $x\in V$，可得 $B:L^{\beta}([0,T],L^{\rho}(V))\to L^{\infty}([0,T],L^p(V))$ 是有界算子，并存在正常数 $C>0$ 使得下述不等式成立:

i) 对任意 $\beta>\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{d}{4}(k-1)}$ 有

$$\|B(v)(t_1,t_2,\cdot)\|_p\leqslant Ct^{\frac{1}{2}+\frac{d}{4}(k-1)-\frac{1}{\beta}}\|v(*,\cdot)\|_{L^{\beta}([t_1,t_2],L^{\rho}(V))}\tag{11}$$

ii) 对任意 $\gamma\in\left(0,\frac{1}{2}+\frac{d}{4}(k-1)\right)$,

$$\beta>\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{d}{4}(k-1)-\gamma},$$

有

$$\|B(v)(0,t_2,\cdot)-B(v)(0,t_1,\cdot)\|_p\leqslant C|t_2-t_1|^{\gamma}\|v(*,\cdot)\|_{L^{\beta}([0,T],L^{\rho}(V))}\tag{12}$$

引理 2.2[17]　令 $h\in L^2(\nu)\cap K$, I 是 $[0,T]$ 上任意可测子集，$M>0$. 则存在常数 $\zeta_h>0$ 及映射 $\Gamma_h,e_h:(0,\infty)\to(0,\infty)$，使得对任意 $\varepsilon,\zeta\in(0,\infty)$ 有

$$\sup_{\varphi\in S_{+,\varepsilon}^M}\int_{\mathbb{H}\times I}h^2(l)\varphi(l,s)\nu(\mathrm{d}l)\mathrm{d}s\leqslant\zeta_h(a^2(\varepsilon)+\lambda_T(I))\tag{13}$$

$$\sup_{\psi\in S_{\varepsilon}^M}\int_{\mathbb{H}\times I}|h(l)\psi(l,s)|1_{\{|\psi|>\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}\nu(\mathrm{d}l)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\Gamma_h(\zeta)(1+\sqrt{\lambda_{\mathrm{T}}(I)}) \tag{14}$$

$$\sup_{\psi\in S_\varepsilon^M}\int_{\mathbb{H}\times\mathrm{I}} |h(l)\psi(l,s)|\nu(\mathrm{d}l)\mathrm{d}s \leqslant e_h(\zeta)\sqrt{\lambda_{\mathrm{T}}(I)}+\Gamma_h(\zeta)a(\varepsilon) \tag{15}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\psi\in S_\varepsilon^M}\int_{\mathbb{H}\times[0,T]} |h(l)\psi(l,s)|1_{\{|\psi|>\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}\nu(\mathrm{d}l)\mathrm{d}s=0 \tag{16}$$

其中映射Γ_h满足$\Gamma_h(u)\downarrow 0$，当 $u\uparrow\infty$.

引理 2.3　设$\{K^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$是空间$E^\alpha$中的随机过程序列. 若对任意 $4\leqslant p\leqslant q$ 有

(i) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\|K^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q=0,\forall t\in[0,T]$；

(ii) 存在常数 $C,\gamma_0>0$，使得对任意$t_1,t_2\in[0,T]$，有

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\mathbb{E}[\|K^\varepsilon(t_2,\cdot)-K^\varepsilon(t_1,\cdot)\|_p^q]\leqslant C|t_2-t_1|^{\gamma_0 q},$$

则对于$\alpha\leqslant\frac{\gamma_0}{4},\alpha<\frac{1}{2}(1-\frac{d}{4})$有$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\|K^\varepsilon\|_{\alpha,p}^q=0$.

证明　根据文献[18，引理 A1]，上述结论可以从 Garsia-Rademich-Rumsay 引理推导出来.

引理 2.4[9]　假设(Ξ,F,μ)是带有滤子$\{F_t\}_{t\leqslant 0\leqslant T}$的可测空间，$Z$ 是 Polish 空间. 设 I 是 Polish 空间 Z 上的速率函数，即对任意 $M<\infty$，水平集$\{\xi\in Z:I(\xi)\leqslant M\}$是 Z 上的紧子集. 则对于给定的一族 Z-值随机变量$\{Z^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$和趋于 0 的正实数$\{b(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$. $\{Z^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$在 Z 上满足速度为$b(\varepsilon)$，速率函数为 I 的大偏差原理，若

(i) 大偏差上界(ULD)：$\forall$闭集 $F\subset Z$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\frac{1}{b(\varepsilon)}\log\mu(Z^\varepsilon\in F)\leqslant-\inf_{\xi\in F}I(\xi);$$

(ii) 大偏差下界(LLD)：$\forall$开集 $G\subset Z$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\frac{1}{b(\varepsilon)}\log\mu(Z^\varepsilon\in G)\geqslant-\inf_{\xi\in G}I(\xi).$$

定理 2.5　假定条件(H1)～(H3)成立. 设方程(1)和(2)分别在空间 $D([0,T],L^p(V))$和E^α中存在唯一解. 则存在常数$\varepsilon_0\in(0,1]$，$q\geqslant p\geqslant 4$，使得

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q]<\infty \tag{17}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u^0(t,\cdot)\|_p<\infty \tag{18}$$

证明　类似文献[3，定理 3.1]的证明，利用不动点理论易证.

3　中偏差条件

在随机偏微分系统中，通常运用指数逼近方法进行中偏差问题的研究，即将时间离散化后证明指数连续性和紧性，再利用比较原理得到中偏差原理[16]. 对于无穷维随机偏微分方程，特别是带跳噪声情形，则应考虑运用弱收敛准则解决随机积分带来的困难，以避免指数概率估计的复杂. 本节将逐一讨论中偏差条件 I 和 II 来建立弱收敛判别准则[16].

3.1　中偏差条件 I (MDP-1)

设可测映射$G_0:L^2(\nu_T)\to E^\alpha$，对于$\psi\in L^2(\nu_T)$，使得$G_0(\psi)=\eta$且$(\eta,\psi)$满足方程

$$\begin{cases}\eta(t,x)=\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\sigma(u^0(s,y),z)\psi(s,y,z)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\\\qquad\int_0^t\int_V\Delta G_{t-s}(x,y)f'(u^0(s,y))\eta(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,\\\eta(0,x)=0\end{cases} \tag{19}$$

命题 3.1(MDP-1)　假定条件(H1)～(H3)成立. 给定 $Y\in(0,\infty)$，设有$g^\varepsilon,g\in B_2(Y)$满足$g^\varepsilon\to g$. 则在空间$E^\alpha$中 $G_0(g^\varepsilon)\to G_0(g)$.

证明　考虑

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|G_0(g^\varepsilon)-G_0(g)\|_{\alpha,p}^q=0,\mathbb{P}\text{-a. s.} \tag{20}$$

即证对于 $4\leqslant p\leqslant q$ 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\|G_0(g^\varepsilon)-G_0(g)\|_{\alpha,p}^q=0 \tag{21}$$

其中

$$\alpha\leqslant\frac{\gamma_0}{4},\alpha<\frac{1}{2}(1-\frac{d}{4}),\gamma_0\in(0,1).$$

令$K^\varepsilon=G_0(g^\varepsilon)-G_0(g)$. 则有

$$K^\varepsilon(t,x)=\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\sigma(u^0(s,y),z)\cdot[g^\varepsilon(z,y,s)-g(z,y,s)]\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\int_0^t\int_V\Delta G_{t-s}(x,y)f'(u^0(s,y))K^\varepsilon(s,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}s:=J_1^\varepsilon(t,x)+J_2^\varepsilon(t,x) \tag{22}$$

对于$J_1^\varepsilon(t,x)$，由 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$|J_1^\varepsilon(t,x)|\leqslant\sqrt{2}\left(\int_0^T\int_V\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}^2(x,y)\sigma^2(u^0(s,y),z)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^T\int_V\int_{\mathbb{X}}|g^\varepsilon(z,y,s)|^2\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\int_0^T\int_V\int_{\mathbb{X}}|g(z,y,s)|^2\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

结合引理 2.1,有

$$\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}} G_{t-s}^2(x,y)\,\sigma^2(u^0(s,y),z)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant C_T < \infty.$$

于是

$$|J_1^\varepsilon(t,x)| \leqslant 2\,C_T\mathrm{Y} < \infty.$$

则 $J_1^\varepsilon(t,x)$ 是一致有界 a. s. 的. 又因为 g^ε 在具有弱拓扑的球 $B_2(\mathrm{Y})$ 中收敛到 g,则

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_1^\varepsilon(t,x)=0,\ \text{a. s.} \tag{23}$$

进一步,由控制收敛定理得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\|J_1^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q=0 \tag{24}$$

对于 $J_2^\varepsilon(t,x)$,由引理 2.1 有

$$\mathbb{E}\|J_2^\varepsilon(t,x)\|_p^q \leqslant C t^{\frac{1}{2}+\frac{d}{4}(k-1)-\frac{1}{\beta}}\cdot \mathbb{E}\|f'(u^0(s,y))\,K^\varepsilon(s,y)\|_{L^\beta([0,t],L^\rho(V))}^q \leqslant C_T\int_0^T \mathbb{E}\|K^\varepsilon(s,\cdot)\|_p^q\mathrm{d}s \tag{25}$$

其中 $q\geqslant p\geqslant 4,\rho\in[1,p]$,

$$k=\frac{1}{p}-\frac{1}{\rho}+1\in[0,1],$$

$$\beta\in\Big(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{d}{4}(k-1)},q\Big].$$

综上,由 Gronwall 不等式得

$$\mathbb{E}\|K^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q \leqslant C(\mathbb{E}\|J_1^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q+\mathbb{E}\|J_2^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q) \leqslant C\Big(\mathbb{E}\|J_1^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q+C_T\int_0^T\mathbb{E}\|K^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q\mathrm{d}s\Big).$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时,有

$$\mathbb{E}\|K^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q\leqslant C\,\mathbb{E}\|J_1^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^q\to 0.$$

易知引理 2.3 中的(i)式成立.

根据文献[9,定理 4.1]可知,存在常数 $\gamma_0>0$ 使得

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\mathbb{E}\|G_0(g^\varepsilon)(t_2,\cdot)-G_0(g^\varepsilon)(t_1,\cdot)\|_p^q\leqslant C\,|t_2-t_1|^{\gamma_0 q},$$

$$\mathbb{E}\|G_0(g)(t_2,\cdot)-G_0(g)(t_1,\cdot)\|_p^q\leqslant C\,|t_2-t_1|^{\gamma_0 q}.$$

故引理 2.3 (ii)成立. 所以(21)式成立. 证毕.

3.2　中偏差条件 Ⅱ(MDP-2)

借鉴文献[16]的做法,我们引入一个控制过程 $X^\varepsilon\in D([0,T],L^p(V))$,满足方程

$$\begin{cases} X^\varepsilon(t,x)=\int_V G_t(x,y)u_0(y)\mathrm{d}y+\int_0^t\int_V \Delta G_{t-s}(x,y)f(X^\varepsilon(s,y))\mathrm{d}y\mathrm{d}s+ \\ \varepsilon\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}} G_{t-s}(x,y)\sigma(X^\varepsilon(s-,y),z)\cdot \widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}\varphi^\varepsilon}(\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s)+\int_0^t\int_V\int_X G_{t-s}(x,y)\cdot \\ \sigma(X^\varepsilon(s,y),z)(\varphi^\varepsilon(z,y,s)-1)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s, \\ X^\varepsilon(0,x)=u_0(x) \end{cases} \tag{26}$$

其中可测映射 $\varphi^\varepsilon\in U_{+,\varepsilon}^M\subset S_{+,\varepsilon}^M$.

对任意 $p\geqslant 4$,由定理 2.5 有

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[\|X^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^p]<\infty \tag{27}$$

设常数 $R>0$. 对任意 $q\geqslant p\geqslant 4,t\in[0,T]$,令

$$\Lambda^\varepsilon(t,R)\triangleq\{\omega\in\Omega:\sup_{s\in[0,t]}\|X^\varepsilon(s,\cdot)\|_p^p\vee \sup_{s\in[0,t]}\|u^0(s,\cdot)\|_p^q\leqslant R\} \tag{28}$$

命题 3.2　假定条件(H1)~(H3)成立. 则对任意 $p\geqslant 4$,存在正数 C 使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\|X^\varepsilon(t,\cdot)-u^0(t,\cdot)\|_p^p\leqslant C[\varepsilon^p+a^p(\varepsilon)]\to 0,\varepsilon\to 0 \tag{29}$$

证明　由(28)式易证当 $\varepsilon\to 0,R\to\infty$ 时有 $\mathbb{P}(\Lambda^\varepsilon(t,R)^c)\to 0$.

故只需证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|X^\varepsilon(t,\cdot)-u^0(t,\cdot)\|_p^p]=0 \tag{30}$$

注意到

$$X^\varepsilon(t,x)-u^0(t,x)=\int_0^t\int_V\Delta G_{t-s}(x,y)[f(X^\varepsilon(s,y))-f(u^0(s,y))]\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}}\varepsilon G_{t-s}(x,y)\cdot\sigma(X^\varepsilon(s-,y),z)\,\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}\varphi^\varepsilon}(\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s)+\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\sigma(X^\varepsilon(s,y),z)\cdot(\varphi^\varepsilon(z,y,s)-1)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s:=L_1^\varepsilon(t,x)+L_2^\varepsilon(t,x)+L_3^\varepsilon(t,x),$$

对于 $L_1^\varepsilon(t,x)$,由(11)式有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|L_1^\varepsilon(t,x)\|_p^p]&\leqslant C_T\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|f(X^\varepsilon(s,\cdot))-f(u^0(s,\cdot))\|_{L^\beta([0,T],L^\rho(V))}^p]\\&\leqslant C_T\mathbb{E}[\textstyle\int_0^t 1_{\Lambda^\varepsilon(s,R)}\|f(X^\varepsilon(s,\cdot))-f(u^0(s,\cdot))\|_\rho^p\mathrm{d}s]\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $p\geqslant 4,\rho\in[1,p]$，

$$k=\frac{1}{p}-\frac{1}{\rho}+1\in[0,1],$$

$$\beta\in\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{d}{4}(k-1)},p\right].$$

由 Hölder 不等式可得

$$\|f(X^{\varepsilon}(s,\cdot))-f(u^{0}(s,\cdot))\|_{\rho}^{p}\leqslant C\|X^{\varepsilon}(s,\cdot)-u^{0}(s,\cdot)\|_{p}^{p}\cdot(1+\|X^{\varepsilon}(s,\cdot)\|_{p}^{2p}+\|u^{0}(s,\cdot)\|_{p}^{2p})\tag{32}$$

因此，

$$\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\|L_{1}^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_{p}^{p}]\leqslant C_{T,R}\,\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}1_{\Lambda^{\varepsilon}(s,R)}\|X^{\varepsilon}(s,\cdot)-u^{0}(s,\cdot)\|_{p}^{p}\mathrm{d}s\right]\tag{33}$$

对于$L_{2}^{\varepsilon}(t,x)$，由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式和 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\|L_{2}^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_{p}^{p}]\leqslant\\&\varepsilon^{\frac{p}{2}}C\int_{V}\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\left|\int_{0}^{T}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}^{2}(x,y)M_{\sigma}^{2}(z,y)\cdot\right.\\&(1+\|X^{\varepsilon}(s,\cdot)\|_{p})^{2}\cdot\\&\varphi^{\varepsilon}(z,y,s)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\left.\right|^{\frac{p}{2}}]\mathrm{d}x\leqslant\\&\varepsilon^{\frac{p}{2}}C_{p,R}\int_{V}\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\left|\int_{0}^{T}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}^{2}(x,y)\cdot\right.\\&\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\left.\right|^{\frac{pr}{2}}\left|\int_{0}^{T}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}^{2}(x,y)\cdot\right.\\&(M_{\sigma}(z,y)\sqrt{\varphi^{\varepsilon}(z,y,s)})^{\frac{2}{1-r}}\cdot\\&\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\left.\right|^{\frac{p(1-r)}{2}}]\mathrm{d}x,\ 0<r<1.\end{aligned}$$

特别地，取 $r=1-\frac{2}{p},p>2$. 由 (9)，(13)式可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\|L_{2}^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_{p}^{p}]\leqslant\\&\varepsilon^{\frac{p}{2}}C_{T,p,R}\,\mathbb{E}\left[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\int_{0}^{T}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}M_{\sigma}^{2p}(z,y)\cdot\right.\\&\left.\varphi^{\varepsilon p}(z,y,s)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]\leqslant\\&\varepsilon^{\frac{p}{2}}C_{T,p,R}[\zeta_{M_{\sigma}}(a^{2}(\varepsilon)+T)]\leqslant C\varepsilon^{p}\end{aligned}\tag{34}$$

对于$L_{3}^{\varepsilon}(t,x)$，令$\psi^{\varepsilon}=(\varphi^{\varepsilon}-1)/a(\varepsilon)$. 由(10)式和引理 2.2 得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\|L_{3}^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_{p}^{p}]\leqslant\\&a^{p}(\varepsilon)C_{p,R}\int_{V}\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\cdot\\&\left|\int_{0}^{T}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{pr}\cdot\\&\left|\int_{0}^{T}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)(M_{\sigma}(z,y)\cdot\right.\\&\psi^{\varepsilon}(z,y,s))^{\frac{1}{1-r}}\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\left.\right|^{p(1-r)}]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

特别地，取 $r=1-\frac{1}{p},p>1$. 运用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\|L_{3}^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_{p}^{p}]\leqslant\\&a^{p}(\varepsilon)C_{T,p,R}\,\mathbb{E}\left[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\left|\int_{0}^{T}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}M_{\sigma}^{p}(z,y)\cdot\right.\right.\\&\left.\left.\psi^{\varepsilon p}(z,y,s)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\right]\leqslant\\&a^{p}(\varepsilon)C_{T,p,R}[e_{M_{\sigma}}(\zeta)\sqrt{T}+\Gamma_{M_{\sigma}}(\zeta)a(\varepsilon)]\leqslant\\&Ca^{p}(\varepsilon)\end{aligned}\tag{35}$$

综上，由 Gronwall 不等式得

$$\mathbb{E}[1_{\Lambda^{\varepsilon}(t,R)}\|X^{\varepsilon}(t,\cdot)-u^{0}(t,\cdot)\|_{p}^{p}]\leqslant C[\varepsilon^{p}+a^{p}(\varepsilon)]\to 0,\varepsilon\to 0\tag{36}$$

因而(30)式成立. 证毕.

定义

$$G^{\varepsilon}(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}\varphi^{\varepsilon}}):=Y^{\varepsilon}=\frac{1}{a(\varepsilon)}(X^{\varepsilon}-u^{0})\tag{37}$$

则Y^{ε}满足下列方程

$$\begin{cases}Y^{\varepsilon}(t,x)=\int_{0}^{t}\int_{V}\Delta G_{t-s}(x,y)\dfrac{f(u^{0}(s,y)+a(\varepsilon)Y^{\varepsilon}(s,y))-f(u^{0}(s,y))}{a(\varepsilon)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\\\dfrac{\varepsilon}{a(\varepsilon)}\int_{0}^{t}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\sigma(X^{\varepsilon}(s-,y),z)\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}\varphi^{\varepsilon}}(\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s)+\\\dfrac{1}{a(\varepsilon)}\int_{0}^{t}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\sigma(X^{\varepsilon}(s,y),z)(\varphi^{\varepsilon}(z,y,s)-1)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,\\Y^{\varepsilon}(0,x)=0\end{cases}\tag{38}$$

命题 3.3（MDP-2）　给定 $M>0$，$\{\varphi^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}\subset U_{+,\varepsilon}^{M}$，且$\psi^{\varepsilon}=(\varphi^{\varepsilon}-1)/a(\varepsilon)$，$\zeta\in(0,1]$. 当 $\varepsilon\to 0$ 时，若$\psi^{\varepsilon}1_{\{|\psi^{\varepsilon}|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}$在球$B_{2}(\sqrt{M\kappa_{2}(1)})$中依分布收敛到 ψ，则$G^{\varepsilon}(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}\varphi^{\varepsilon}})$在 $D([0,T],L^{p}(V))$中依分布收敛到$G_{0}(\psi)$，这里的G_{0}在 3.1 节中定义.

证明　考虑控制过程$Z^{\varepsilon}\in D([0,T],L^{p}(V))$满足方程

$$Z^{\varepsilon}(t,x)=\frac{\varepsilon}{a(\varepsilon)}\int_{0}^{t}\int_{V}\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\cdot\sigma(X^{\varepsilon}(s-,y),z)\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}\varphi^{\varepsilon}}(\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s)+$$

$$\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}} G_{t-s}(x,y)\sigma(X^\varepsilon(s,y),z)\cdot \psi^\varepsilon(z,y,s)\,1_{\{|\psi^\varepsilon|>\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}} G_{t-s}(x,y)[\sigma(X^\varepsilon(s,y),z)-\sigma(u^0(s,y),z)]\,\psi^\varepsilon(z,y,s)\,1_{\{|\psi^\varepsilon|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \coloneqq Z_1^\varepsilon+Z_2^\varepsilon+Z_3^\varepsilon \tag{39}$$

由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式、Hölder 不等式和引理 2.2 得

$$\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|Z_1^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^p]\leqslant \left[(1+\sup_{s\in[0,T]}\|X^\varepsilon(s,\cdot)\|_p^2)\frac{\varepsilon}{a(\varepsilon)}\right]^p\cdot \int_V\mathbb{E}\Big[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\Big|\int_0^T\int_V\int_{\mathbb{X}} G_{t-s}^2(x,y)\cdot M_\sigma^2(z,y)\,\varphi^\varepsilon(z,y,s)\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big|^{\frac{p}{2}}\Big]\mathrm{d}x\leqslant \zeta_{M_\sigma}(a^2(\varepsilon)+T)\left[\frac{\varepsilon}{a(\varepsilon)}\right]^pC\to 0,\varepsilon\to 0 \tag{40}$$

且

$$\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|Z_2^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^p]\leqslant C\,\mathbb{E}\Big[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\Big|\int_0^T\int_{\mathbb{X}} M_\sigma^p(z,y)\cdot \psi^\varepsilon(z,y,s)\,1_{\{|\psi^\varepsilon|>\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\Big|\Big]\to 0,\varepsilon\to 0 \tag{41}$$

由命题 3.2 和 (15) 式有

$$\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|Z_3^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^p]\leqslant C\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|X^\varepsilon(s,\cdot)-u^0(s,\cdot)\|_p^p]\cdot \int_V\Big|\int_0^T\int_V\int_{\mathbb{X}} G_{t-s}(x,y)\,L_\sigma(z,y)\cdot \psi^\varepsilon\,1_{\{|\psi^\varepsilon|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big|^p\mathrm{d}x\leqslant C(e_{L_\sigma}(\zeta)\sqrt{T}+\Gamma_{L_\sigma}(\zeta)a(\varepsilon))\cdot \sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|X^\varepsilon(s,\cdot)-u^0(s,\cdot)\|_p^p]\to 0,\ \varepsilon\to 0 \tag{42}$$

综上，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|Z^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^p]=0 \tag{43}$$

令$\Theta^\varepsilon=Y^\varepsilon-Z^\varepsilon$. 则

$$\Theta^\varepsilon(t,x)=\int_0^t\int_V \Delta G_{t-s}(x,y)\frac{f(u^0(s,y)+a(\varepsilon)(\Theta^\varepsilon(s,y)+Z^\varepsilon(s,y)))-f(u^0(s,y))}{a(\varepsilon)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}} G_{t-s}(x,y)\sigma(u^0(s,y),z)\,\psi^\varepsilon(z,y,s)\,1_{\{|\psi^\varepsilon|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{44}$$

记

$$\Psi\coloneqq(D([0,T],L^p(V));B_2(\sqrt{M(1)})).$$

根据文献[17，命题 3.6]可知，存在

$$\{\psi^\varepsilon 1_{\{|\psi^\varepsilon|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}}\}_{\varepsilon>0}\in B_2(\sqrt{M\kappa_2(1)}),$$

使得$(Z^\varepsilon,\psi^\varepsilon 1_{\{|\psi^\varepsilon|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}})$在 Ψ 中紧. 令$(0,\psi)$为$(Z^\varepsilon,\psi^\varepsilon 1_{\{|\psi^\varepsilon|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}})$在$\Psi$中的任意极限点，$Y=G_0(\psi)$是方程(19)的解. 由 Skorokhod 表达定理，存在随机基$(\hat{\Omega},\hat{F},\{\hat{F}_t\}_{t\in[0,T]},\hat{\mathbb{P}})$及其上的 Ψ-值的随机变量$(\hat{Z}^\varepsilon,\hat{\psi}^\varepsilon)$，$(0,\hat{\psi})$，其中$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$使得$(\hat{Z}^\varepsilon,\hat{\psi}^\varepsilon)$和$(0,\hat{\psi})$分别与$(Z^\varepsilon,\psi^\varepsilon 1_{\{|\psi^\varepsilon|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}})$和$(0,\psi)$具有相同分布，并且 在 Ψ 中有$(\hat{Z}^\varepsilon,\hat{\psi}^\varepsilon)\to(0,\hat{\psi})$，$\hat{\mathbb{P}}$-a. s.

设$\hat{\Theta}^\varepsilon$是方程 (44) 中将$(Z^\varepsilon,\psi^\varepsilon 1_{\{|\psi^\varepsilon|\leqslant\frac{\zeta}{a(\varepsilon)}\}})$替换为$(\hat{Z}^\varepsilon,\hat{\psi}^\varepsilon)$的解，$\hat{Y}$是方程 (19) 中将 ψ 替换为$\hat{\psi}$的解. 则$\hat{\Theta}^\varepsilon$和Θ^ε具有相同分布，从而$\hat{Y}^\varepsilon=\hat{Z}^\varepsilon+\hat{\Theta}^\varepsilon$和$Y^\varepsilon=Z^\varepsilon+\Theta^\varepsilon$具有相同分布. 注意到

$$\hat{\Theta}^\varepsilon(t,x)-\hat{Y}(t,x)=\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}} G_{t-s}(x,y)\sigma(u^0(s,y),z)[\hat{\psi}^\varepsilon(z,y,s)-\hat{\psi}(z,y,s)]\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\int_0^t\int_V \Delta G_{t-s}(x,y)\Big[\frac{f(u^0(s,y)+a(\varepsilon)(\hat{\Theta}^\varepsilon(s,y)+\hat{Z}^\varepsilon(s,y)))-f(u^0(s,y))}{a(\varepsilon)}-f'(u^0(s,y))\hat{Y}(s,y)\Big]\mathrm{d}y\mathrm{d}s\coloneqq\hat{M}_1^\varepsilon+\hat{M}_2^\varepsilon \tag{45}$$

因$\hat{\psi}^\varepsilon$在$B_2(\sqrt{M\kappa_2(1)})$中弱收敛到$\hat{\psi}$，类似 (24) 式的估计可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\hat{\mathbb{E}}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|\hat{M}_1^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^p]=0 \tag{46}$$

其中$\hat{\mathbb{E}}$为关于概率$\hat{\mathbb{P}}$的期望. 又因为

$$\hat{M}_2^\varepsilon(t,x)=\int_0^t\int_V \Delta G_{t-s}(x,y)\Big[\frac{f(u^0(s,y)+a(\varepsilon)(\hat{\Theta}^\varepsilon(s,y)+\hat{Z}^\varepsilon(s,y)))-f(u^0(s,y))}{a(\varepsilon)}-f'(u^0(s,y))(\hat{\Theta}^\varepsilon(s,y)+\hat{Z}^\varepsilon(s,y))\Big]\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\int_0^t\int_V \Delta G_{t-s}(x,y)f'(u^0(s,y))\cdot[\hat{\Theta}^\varepsilon(s,y)-\hat{Y}(s,y)+\hat{Z}^\varepsilon(s,y)]\mathrm{d}y\mathrm{d}s:=\hat{M}_{2,1}^\varepsilon(t,x)+\hat{M}_{2,2}^\varepsilon(t,x) \tag{47}$$

类似于式(31)的估计，由导数均值定理可知，对任意 $\varepsilon\in(0,1]$，存在随机场 $\xi^\varepsilon(t,x),\eta^\varepsilon(t,x)\in(0,1)$，使得对任意 $p\geqslant4,\rho\in[1,p]$ 有

$$\sup_{t\in[0,T]}\hat{\mathbb{E}}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|\hat{M}_{2,1}^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^p]\leqslant a^p(\varepsilon)C\,\hat{\mathbb{E}}\Big[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\int_0^T\|f''(u^0(s,\cdot)+a(\varepsilon)\xi^\varepsilon(s,\cdot)\eta^\varepsilon(s,\cdot)(\hat{\Theta}^\varepsilon(s,\cdot)+\hat{Z}^\varepsilon(s,\cdot)))\cdot|\hat{\Theta}^\varepsilon(s,\cdot)+\hat{Z}^\varepsilon(s,\cdot)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\|_\rho^p\mathrm{d}s\Big]\leqslant a^p(\varepsilon)C_T\to0,\varepsilon\to0 \tag{48}$$

由 (43) 式有

$$\hat{\mathbb{E}}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|\hat{M}_{2,2}^\varepsilon(t,\cdot)\|_p^p]\leqslant C\,\hat{\mathbb{E}}\Big[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\int_0^T\|f'(u^0(s,\cdot))(\hat{\Theta}^\varepsilon(s,\cdot)-\hat{Y}(s,\cdot)+\hat{Z}^\varepsilon(s,\cdot))\|_\rho^p\mathrm{d}s\Big]\leqslant C\int_0^T\hat{\mathbb{E}}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|\hat{\Theta}^\varepsilon(s,\cdot)-\hat{Y}(s,\cdot)\|_p^p]\mathrm{d}s,\quad \rho\in[1,p] \tag{49}$$

于是由 Gronwall 不等式得

$$\sup_{t\in[0,T]}\hat{\mathbb{E}}[1_{\Lambda^\varepsilon(t,R)}\|\hat{\Theta}^\varepsilon(t,\cdot)-\hat{Y}(t,\cdot)\|_p^p]\leqslant a^p(\varepsilon)C\to0,\varepsilon\to0 \tag{50}$$

因而

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{t\in[0,T]}\hat{\mathbb{E}}\|\hat{Y}^\varepsilon(t,\cdot)-\hat{Y}(t,\cdot)\|_p^p=0,\quad\forall p\geqslant4 \tag{51}$$

证毕.

4　中偏差原理

下面我们给出本文的主要结论及其证明.

引理 4.1[16]　假定条件（H1）～（H3）成立且偏差尺度 $a(\varepsilon)$ 满足（4）式. 则 $\{\frac{u^\varepsilon-u^0}{a(\varepsilon)}:=\mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}}),\varepsilon>0\}$ 在空间 $D([0,T],L^p(V))$ 上满足大偏差原理，其速度为 $\varepsilon/a^2(\varepsilon)$，速率函数 I 为

$$I(\eta)=\inf_{\psi\in\mathbb{S}_\eta^0}\left\{\frac{1}{2}\|\psi\|_2^2\right\} \tag{52}$$

其中 $I(\eta)=+\infty,\mathbb{S}_\eta^0=\{\psi\in L^2(\nu_T)\,|\,\eta=\mathcal{G}_0(\psi)\}=\varnothing$，且 (η,ψ) 满足(19)式.

证明　设 $I:D([0,T],L^p(V))\to[0,\infty]$ 是 $D([0,T],L^p(V))$ 上满足(52)式的速率函数. 定义 $\hat{Y}^\varepsilon:=\frac{u^\varepsilon-u^0}{a(\varepsilon)}$. 则 $\hat{Y}^\varepsilon$ 满足方程

$$\hat{Y}^\varepsilon(t,x)=\int_0^t\int_V\Delta G_{t-s}(x,y)\cdot\frac{f(u^\varepsilon(s,y))-f(u^0(s,y))}{a(\varepsilon)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\frac{\varepsilon}{a(\varepsilon)}\int_0^t\int_V\int_{\mathbb{X}}G_{t-s}(x,y)\sigma(u^\varepsilon(s-y),z)\cdot\widetilde{N}^{\varepsilon^{-1}}(\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s) \tag{53}$$

其初值为 $\hat{Y}^\varepsilon(0,x)=0$. 由文献[17]可知，方程(53)给定可测映射 $\mathcal{G}^\varepsilon:\mathbb{M}\to D([0,T],L^p(V))$，使得 $\hat{Y}^\varepsilon=\mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}})$. 根据文献[17，定理 3.2]可知，证明偏差变量 $\hat{Y}^\varepsilon$ 满足弱收敛判别准则，我们只需验证可测映射 $\mathcal{G}^\varepsilon,\mathcal{G}_0$ 满足中偏差条件 I 和 II（参见文献[17，定理 2.1]）. 于是由命题 3.1（MDP-1）和命题 3.3（MDP-2）知，偏差变量 $\hat{Y}^\varepsilon$ 在空间 $D([0,T],L^p(V))$ 上满足大偏差原理，其速度为 $\varepsilon/a^2(\varepsilon)$ 且速率函数为 I. 所以 $\hat{Y}^\varepsilon$ 满足引理 2.4 的大偏差上下界，即对任意闭集 $F\subset D([0,T],L^p(V))$ 和开集 $G\subset D([0,T],L^p(V))$ 有

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon/a^2(\varepsilon)}\log\mathbb{P}(\hat{Y}^\varepsilon\in F)\leqslant-\inf_{\xi\in F}I(\xi),$$

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon/a^2(\varepsilon)}\log\mathbb{P}(\hat{Y}^\varepsilon\in G)\geqslant-\inf_{\xi\in G}I(\xi).$$

证毕.

引理 4.2[11]　在偏差条件（4）下，如果随机变量 $\hat{Y}^\varepsilon=\frac{u^\varepsilon-u^0}{a(\varepsilon)}$ 在空间 $D([0,T],L^p(V))$ 上满足大偏差原理，则随机 Cahn-Hilliard 方程（1）的解 u^ε 满足中偏差原理.

定理 4.3　假定条件（H1）～（H3）成立. 则随机 Cahn-Hilliard 方程(1)的解 u^ε 满足中偏差原理.

证明　由引理 4.1 知，随机变量$\frac{u^\varepsilon-u^0}{a(\varepsilon)}$满足大偏差原理，其中偏差尺度 $a(\varepsilon)$满足

$$a(\varepsilon)\to 0,\varepsilon/a^2(\varepsilon)\to 0,\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时}.$$

根据引理 4.2，此类特殊的大偏差原理称为随机 Cahn-Hilliard 方程的解u^ε的中偏差原理. 证毕.

参考文献：

[1] Da Prato G, Debussche A. Stochastic Cahn-Hilliard equation [J]. Nonlinear Anal: Theor, 1996, 26: 241.

[2] Cahn J W, Hilliard J E. Free energy of a nonuniform system (I): interfacial free energy [J]. J Chem Phys, 1958, 28: 258.

[3] Guo B L, Wang G L, Wang S. Well posedness for the stochastic Cahn-Hilliard equation driven by Lévy space-time white noise [J]. Differ Integral Equ, 2009, 22: 543.

[4] Cardon-Weber C. Cahn-Hilliard stochastic equation: existence of the solution and of its density [J]. Bernoulli, 2001, 7: 777.

[5] Bo L J, Jiang Y M, Wang Y J. Stochastic Cahn-Hilliard equation with fractional noise [J]. Stoch Dynam, 2008, 8: 643.

[6] Goudenège L, Manca L. Asymptotic properties of stochastic Cahn-Hilliard equation with singular nonlinearity and degenerate noise [J]. Stoch Proc Appl, 2015, 125: 3785.

[7] Wu J L, Xie B. On a Burgers type nonlinear equation perturbed by a pure jump Lévy noise in $\mathbf{R}^d$ [J]. B Sci Math, 2012, 136: 484.

[8] Bo L J, Wang Y J. Stochastic Cahn-Hilliard partial differential equations with Lévy space-time white noises [J]. Stoch Dynam, 2006, 6: 229.

[9] Boulanba L, Mellouk M. Large deviations for a stochastic Cahn-Hilliard equation in Hölder norm [J]. Infin Dimens Anal Qu, 2020, 23: 17.

[10] Shi K H, Tang D, Wang Y J. Large deviation for stochastic Cahn-Hilliard partial differential equations [J]. Acta Math Sin, 2009, 25: 1157.

[11] Deugoue G, Tachim Medjo T. Large deviation for a 2D Cahn-Hilliard-Navier-Stokes model under random influences [J]. J Math Anal Appl, 2020, 486: 34.

[12] Zhai J L, Zhang T S. Large deviations for 2-D stochastic Navier-Stokes equations driven by multiplicative Lévy noises [J]. Bernoulli, 2015, 21: 2351.

[13] Belfadli R, Boulanba L, Mellouk M. Moderate deviations for a stochastic Burgers equation [J]. Mod Stoch Theory Appl, 2019, 6: 167.

[14] Cheng L Y, Li R N, Wang R, *et al*. Moderate deviations for a stochastic wave equation in dimension three [J]. Acta Appl Math, 2018, 158: 67.

[15] Li R N, Wang X Y. Central limit theorem and moderate deviations for a perturbed stochastic Cahn-Hilliard equation [J]. Stoch Dynam, 2020, 20: 19.

[16] Budhiraja A, Dupuis P, Ganguly A. Moderate deviation principles for stochastic differential equations with jumps [J]. Ann Probab, 2016, 44: 1723.

[17] Dong Z, Xiong J, Zhai J L, *et al*. A moderate deviation principle for 2D stochastic Navier-Stokes equations driven by multiplicative Lévy noises [J]. J Funct Anal, 2017, 272: 227.

[18] Cardon-Weber C, Millet A. A support theorem for a generalized burgers SPDE [J]. Potential Anal, 2001, 15: 361.

引用本文格式：

中　文：王颖，陈光淦，汪品. 带乘性 Lévy 噪声的随机 Cahn-Hilliard 方程的中偏差原理[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：061003.

英　文：Wang Y, Chen G G, Wang P. Moderate deviation principle for stochastic Cahn-Hilliard equations with multiplicative Lévy noise [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 061003.