

细长刚体块系统中的混沌现象及其 Lyapunov 指数谱计算

蒋金凯, 杜正东

(四川大学数学学院, 成都 610064)

摘要: 本文根据细长刚体块系统的特征推广了一类结合局部映射和 Poincaré 映射计算系统 Lyapunov 指数谱的方法. 通过数值模拟, 本文找到了该系统在外部周期激励下通过异宿分岔产生的混沌轨道, 并利用推广的 Lyapunov 指数谱计算方法进行了验证.

关键词: 分段光滑系统; Lyapunov 指数谱; 异宿分岔; 混沌

中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2022.041003

Calculation of Lyapunov exponential spectrum of chaotic phenomena in a slender rigid block system

JIANG Jin-Kai, DU Zheng-Dong

(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, based on the characteristics of a slender rigid rocking block system, a method is introduced for computing the spectrum of the Lyapunov exponent by combining the local map and the Poincaré map. Then, by numerical simulation, the chaotic orbits under certain parameter conditions generated by heteroclinic bifurcation under external periodic excitation are observed and the extended Lyapunov exponential spectrum method is applied to the rocking block system. Numerical results confirm that the chaotic phenomenon does occur in the system.

Keywords: Piecewise smooth system; Lyapunov exponential spectrum; Heteroclinic bifurcation; Chaos (2010 MSC 37G15)

1 引言

在非光滑动力系统中有多多种多样的分岔现象. 近年来, 随着非光滑动力系统在工程应用领域得到越来越多的应用^[1,2], 对其动力学行为的研究也日益深入^[3]. 其中, 由不连续诱导分岔产生的非光滑动力系统的混沌现象是微分方程与动力系统研究的一个热点. 另一方面, 原本应用于光滑动力系统的 Lyapunov 指数谱计算方法也被推广应用在各种非光滑动力系统中^[4,5]. Lyapunov 指数谱度量

了系统相邻轨道的平均收敛程度, 可以作为一种判定系统混沌的指标.

细长刚体块模型是一个典型的分段光滑系统, 在研究地震对刚体结构的影响等方面有诸多应用. 研究表明^[6-8], 该模型的动力学行为非常丰富, 不仅可以通过鞍结点分岔、音叉分岔、倍周期分岔等产生各种碰撞周期轨道, 进而导致混沌, 还可能通过异宿分岔产生混沌. 本文首先将文献[4]中的 Lyapunov 指数谱计算方法推广应用于类似细长刚体块的其它非光滑动力系统, 然后通过数值模拟验

收稿日期: 2021-10-08

基金项目: 国家自然科学基金(11971019)

作者简介: 蒋金凯(1996—), 男, 四川眉山人, 硕士研究生, 主要研究方向为微分方程与动力系统. E-mail: 1427832418@qq.com

证:当外部周期激励的振幅改变时,系统可以通过异宿分岔产生混沌,最后利用 Lyapunov 指数谱验证了这种混沌现象.

2 预备知识

我们首先引入以下概念.

定义 2.1 当动力系统的轨道反复穿越同一截面时,在连续运动的轨道上用一截面(称 Poincaré 截面)将其横截,利用轨道在截面上穿过的情况就可以判断运动的状态.记 S 为 Poincaré 截面, $x_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 为轨道前一次穿过 S 的点, x_{n+1} 为轨道后一次穿过 S 的点,那么, x_{n+1} 可看成 x_n 的映射:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

称为 Poincaré 映射.

显然,由上述映射 f 可定义一个离散动力系统.

定义 2.2 对上述的离散动力系统,考虑一个起点在 x_0 处的无限小位移矢量 y_0 ,其在映射 f 下演变过程可用以下方程表示:

$$y_{n+1} = Df(x_n) \cdot y_n, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

其中 Df 表示映射 f 的 Jacobi 矩阵. $|y_n|/|y_0|$ 描述了无限小位移的增减比率.因此,系统在满足初始条件 x_0 及沿初始方向 $u_0 = y_0/|y_0|$ 的 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|y_n|}{|y_0|} \right).$$

Lyapunov 指数描述了相空间相邻轨道的平均指数发散率的数值特征.若映射 f 是 n 维的,则存在 n 个 Lyapunov 指数,分别对应于 n 个线性无关的初始方向.将这 n 个数值按从大到小的顺序排列起来,所得结果称为离散动力系统的 Lyapunov 指数谱.

3 模型及 Lyapunov 指数谱计算

图 1 为细长刚体块系统的力学模型.假设该刚体块是质地均匀的,其重心与几何中心 R 重合.同时,在施加外部水平激励时,若不考虑滑动和弹跳现象,则该刚体块在激励作用下反复绕两个底角 A, B 转动.在每次变换转动角时,刚体块与地面发生碰撞.当 $\alpha \ll 1$ 时,其无量纲运动方程由以下常微分方程^[6]表示:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k\dot{x} - x + 1 = -\beta \cos(\omega t), & x > 0, \\ \ddot{x} + k\dot{x} - x - 1 = -\beta \cos(\omega t), & x < 0, \\ \dot{x}(t_A) = r\dot{x}(t_B), & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 表示刚体块的角位移, k 表示系统的阻尼系数, β, ω 分别表示外部水平激励的振幅和频率.当 $x=0$ 时,碰撞发生, t_A, t_B 分别表示发生碰撞的前后时刻.由于是刚性碰撞,因此 $t_A = t_B$. r 表示碰撞的能量恢复系数.进一步,我们将系统(1)改写为如下自治系统:

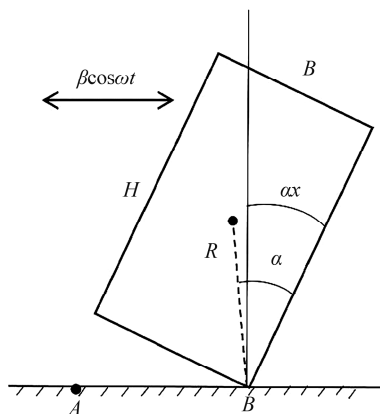


图 1 细长刚体块模型
Fig. 1 The slender rigid block model

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - ky - 1 - \beta \cos \varphi, & x > 0, \\ \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - ky + 1 - \beta \cos \varphi, & x < 0, \\ \dot{\varphi} = \omega, \\ y(t_A) = ry(t_B), & x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由于碰撞的存在,系统轨道在经过碰撞面时不连续,这导致系统的向量场在该处的 Jacobi 矩阵不存在.因此,光滑系统中利用 Jacobi 矩阵计算 Lyapunov 指数谱的方法便不再适用.为了解决这一问题,我们采用类似文献[4]中的方法,结合局部碰撞映射构造 Poincaré 映射,将非光滑系统转化为离散动力系统,进而采用离散动力系计算 Lyapunov 指数谱的方法.为了达到这一目的,我们首先介绍如何构建系统(2)的 Poincaré 映射及计算该映射的 Jacobi 矩阵.

3.1 Poincaré 映射的建立

为了叙述方便,我们首先给出以下子空间的记号:

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi_a}^+ &= \{(x, y, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \times S^1 \mid x \in U^-(0, \delta), \\ & \quad y > 0, \varphi = \varphi_a\}, \\ \Pi_{\varphi_b}^- &= \{(x, y, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \times S^1 \mid x \in U^+(0, \delta), \\ & \quad y < 0, \varphi = \varphi_b\}, \\ \Sigma^+ &= \{(x, y, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \times S^1 \mid x = 0, y > 0\} = \end{aligned}$$

$$\{(y, \varphi) \in \mathbf{R} \times S^1 \mid y > 0\},$$

$$\Sigma^- = \{(x, y, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \times S^1 \mid x = 0, y < 0\} =$$

$$\{(y, \varphi) \in \mathbf{R} \times S^1 \mid y < 0\}.$$

对于存在刚性碰撞引起的非光滑动力学问题, Poincaré 截面的选取有多种方式. 这里我们取系统(2)的轨道与上半碰撞面 Σ^+ 接触前的定相位面 $\Pi_{\varphi_a}^+$ 为 Poincaré 截面, 并构造相应的 Poincaré 映射:

$$P: \Pi_{\varphi_a}^+ \rightarrow \Pi_{\varphi_a}^+ \quad (3)$$

该映射由四个子映射构成, 包括两个碰撞阶段的映射 P_c^+, P_c^- 和两个非碰撞阶段的映射 P_m^+, P_m^- , 其中碰撞阶段的映射由三个局部子映射复合而成, 分别为从定相位面到碰撞面的映射 P_1, P_4 , 从碰撞面到碰撞面的映射 P_2, P_5 , 从碰撞面到定相位面的映射 P_3, P_6 . 但是, 在碰撞阶段与非碰撞阶段的切换时, 系统的状态变量不同, 需要在它们之间建立一个切换映射, 从而得到上述各子映射的 Jacobi 矩阵. 由于系统的 Poincaré 映射 P 中包含了两次碰撞过程, 因此分别存在两个切换映射与之对应. 我们分别用 P_l^+, P_l^- 表示上、下半平面碰撞过程的切换映射.

记 $X = (x, y, \varphi)^T$. 则系统(2)左右两侧向量场可分别记作 $F_1(X), F_2(X)$, 碰撞面可用函数 $h(X): x = 0$ 表示. 根据向量场的几何关系, 可推导出两个切换映射 P_l^+, P_l^- 分别在碰撞点 $X_c^+ = (0, y_c^+, \varphi_c^+)$, $X_c^- = (0, y_c^-, \varphi_c^-)$ 处的 Jacobi 矩阵为^[4]

$$DP_l^+(X_c^+) = I - \frac{F_1(X_c^+) * Dh(X_c^+)}{Dh(X_c^+) \cdot F_1(X_c^+)} \quad (4)$$

$$DP_l^-(X_c^-) = I - \frac{F_2(X_c^-) * Dh(X_c^-)}{Dh(X_c^-) \cdot F_2(X_c^-)} \quad (5)$$

上式中 I 为 3 维单位矩阵, \cdot 和 $*$ 分别表示向量的内积和 2 阶张量.

下面给出系统(2)在碰撞阶段各子映射的定义及其对应的 Jacobi 矩阵. 为了简便起见, 我们只给出上半平面碰撞阶段映射 P_c^+ 的各子映射及其对应 Jacobi 矩阵的计算方法, 下半平面的碰撞阶段映射 P_c^- 可类似处理.

(i) 从定相位面到碰撞面的局部子映射

$$P_1: \Pi_{\varphi_a}^+ \rightarrow \Sigma^+, (x_1, y_1, \varphi_a) \rightarrow (y_c^+, \varphi_c^+),$$

$$P_4: \Pi_{\varphi_b}^- \rightarrow \Sigma^-, (x_3, y_3, \varphi_b) \rightarrow (y_c^-, \varphi_c^-).$$

由于 $P_1(P_4)$ 是从定相位面到碰撞面的投影映射, 只保留 $DP_l^+(DP_l^-)$ 中 (y, φ) 坐标对应的行和 (x, y) 坐标对应的列, 所得到的矩阵就是该局部映射

$P_1(P_4)$ 的 Jacobi 矩阵, 分别为

$$DP_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_c^+} (k y_c^+ - 1 + \beta \cos \varphi_c^+) & 1 \\ -\frac{\omega}{y_c^+} & 0 \end{bmatrix},$$

$$DP_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_c^-} (k y_c^- + 1 + \beta \cos \varphi_c^-) & 1 \\ -\frac{\omega}{y_c^-} & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) 从碰撞面到碰撞面的局部子映射

$$P_2: \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+, (y_c^+, \varphi_c^+) \rightarrow (r y_c^+, \varphi_c^+),$$

$$P_5: \Sigma^- \rightarrow \Sigma^-, (y_c^-, \varphi_c^-) \rightarrow (r y_c^-, \varphi_c^-).$$

利用系统中的碰撞关系式, 可得到局部映射 $P_2(P_5)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$DP_2 = DP_5 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(iii) 从碰撞面到定相位面的局部子映射

$$P_3: \Sigma^+ \rightarrow \Pi_{\varphi_a}^+, (r y_c^+, \varphi_c^+) \rightarrow (x_2, y_2, \varphi_a),$$

$$P_6: \Sigma^- \rightarrow \Pi_{\varphi_b}^-, (r y_c^-, \varphi_c^-) \rightarrow (x_4, y_4, \varphi_b).$$

仍采用与计算 DP_1 类似的方法, 但由于碰撞面两端的向量场不同, 需利用 $DP_l^-(DP_l^+)$ 的逆矩阵得到局部映射 $P_3(P_6)$ 的 Jacobi 矩阵, 分别为

$$DP_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r y_c^+}{\omega} \\ 1 & \frac{1}{\omega} (k r y_c^+ + 1 + \beta \cos \varphi_c^+) \end{bmatrix},$$

$$DP_6 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r y_c^-}{\omega} \\ 1 & \frac{1}{\omega} (k r y_c^- - 1 + \beta \cos \varphi_c^-) \end{bmatrix}.$$

由上述三类局部映射构成的复合映射为

$$P_c^+ = P_3 \circ P_2 \circ P_1, P_c^- = P_6 \circ P_5 \circ P_4.$$

上述映射的 Jacobi 矩阵可通过链式求导法则分别求得

$$DP_c^+ = DP_3 \circ DP_2 \circ DP_1 =$$

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ \frac{1}{y_c^+} [\beta \cos \varphi_c^+ (r-1) - r - 1] & r \end{bmatrix},$$

$$DP_c^- = DP_6 \circ DP_5 \circ DP_4 =$$

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ \frac{1}{y_c^-} [\beta \cos \varphi_c^- (r-1) + r + 1] & r \end{bmatrix}.$$

下面接着定义系统(2)在两个非碰撞阶段的子映射, 分别记为

$$P_m^+: \Pi_{\varphi_a}^+ \rightarrow \Pi_{\varphi_b}^-, (x_2, y_2, \varphi_a) \rightarrow (x_3, y_3, \varphi_b),$$

$$P_m^-: \Pi_{\varphi_b}^- \rightarrow \Pi_{\varphi_a}^+, (x_4, y_4, \varphi_b) \rightarrow (x_5, y_5, \varphi_a).$$

由于系统在该部分的轨道是光滑的,映射 P_m^+, P_m^- 是光滑的同胚映射. 因此, 我们可以通过其多元函数求导法则分别得到映射 P_m^+, P_m^- 的 Jacobi 矩阵 DP_m^+, DP_m^- . 对于某些可求出解析解的系统, 我们可以得到 DP_m^+, DP_m^- 的解析表达式, 而对于大部分非线性微分方程, 我们很难得到其连续流的解析形式. 一般可采用数值方法 (例如: Runge-Kutta 法) 利用系统的变分方程求得.

因此, 由式 (3) 定义的 Poincaré 映射 P 可以表示为以上映射的复合, 即

$$P = P_m^- \circ P_c^- \circ P_m^+ \circ P_c^+ \quad (6)$$

由复合映射的求导法则, Poincaré 映射 P 的 Jacobi 矩阵可写成

$$DP = DP_m^- \circ DP_c^- \circ DP_m^+ \circ DP_c^+ \quad (7)$$

3.2 Lyapunov 指数谱的计算方法

根据式 (3) (7) 定义的 Poincaré 映射 P 及其 Jacobi 矩阵, 令

$$M^N = \prod_{n=1}^N DP \quad (8)$$

则离散动力系统 Lyapunov 指数谱通常定义为^[6]

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |m_i^N|, i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

式中 m_i^N 是矩阵 M^N 的特征值.

在直接利用 (9) 式计算 Lyapunov 指数谱的过程中, 由于要求迭代的次数 $N \rightarrow \infty$, 经常出现病态问题, 导致 M 中的元素或者变得很大 (对于混沌吸引子), 或者变为 0 (对于周期吸引子), 使得计算结果与实际情况不符. 为了消除该问题, 常采用 QR 分解将矩阵 M^N 转化为正交矩阵 Q^N 和上三角矩阵 R^N , 文献 [4] 中给出了其具体的计算过程. 因此, Lyapunov 指数谱的计算式转化为

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |R_n^i| \quad (10)$$

式中的 R_n^i 是经过 n 次迭代后的矩阵 R^n 的对角线元素.

在得到系统的 Lyapunov 指数谱后, 我们可以根据其特征判定系统此时的状态. 其中, 周期解的所有 Lyapunov 指数都为负, 拟周期解至少存在一个 Lyapunov 指数为 0, 且其余的 Lyapunov 指数都为负, 而混沌解至少存在一个 Lyapunov 指数为正.

4 数值模拟

对细长刚体块系统的研究可追溯到上世纪九十年代. Hogan 在文献 [6] 中研究了该系统可能存

在的 $(1, n)$ 型稳定周期轨道的参数范围, 其中 (m, n) 型周期轨道表示该周期轨道在一个周期内经历了 $2m$ 次碰撞, 且其周期是外部激励周期的 n 倍, 并解析的给出了其发生鞍结点分岔与倍周期分岔的条件. 进一步, Hogan 还计算了系统的异宿轨的扰动稳定流形与扰动不稳定流形的解析形式, 利用 Melnikov 方法得到了系统发生异宿分岔的临界参数条件为^[7]

$$\beta_M = \frac{[1 + (k^2 + 2)\omega^2 + \omega^4]^{\frac{1}{2}} |P|}{(K^2 + 4\omega^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

其中,

$$P = (k^2 + 4)^{\frac{1}{2}} (1 - r) + k(1 + r),$$

$$K = (k^2 + 4)^{\frac{1}{2}} (1 + r) + k(1 - r),$$

并推测系统在满足参数条件 $\beta > \beta_M$ 时可能会产生混沌, 但没有通过数值模拟进行验证. 下面我们选取满足 $\beta > \beta_M$ 的适当参数, 通过相应的数值模拟来观察系统是否会产生混沌.

选取系统固定参数 $k = 1, \omega = 5, r = 0.925$. 此时 $\beta_M \approx 12.4702$. 当 $\beta = 15$ 时, 选取初始迭代点为 $(10^{-8}, 0)$, 去除前 10 000 个暂态点的影响后, 系统存在稳定的对称 $(1, 1)$ 型周期轨道, 如图 2 所示. 其中, 实线表示系统的碰撞面, 虚线表示此时系统的稳态轨道. 图 3 展示了该吸引子的 Lyapunov 指数谱序列的收敛情况. 从该图中可见, 序列的收敛速度和收敛性都很好, 且系统在该参数条件下的两个 Lyapunov 指数 (分别以实线和虚线表示) 的收敛值都小于 0, 其中最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1 \approx -0.039$, 表明系统此时处于周期运动状态, 与数值模拟结果相符.

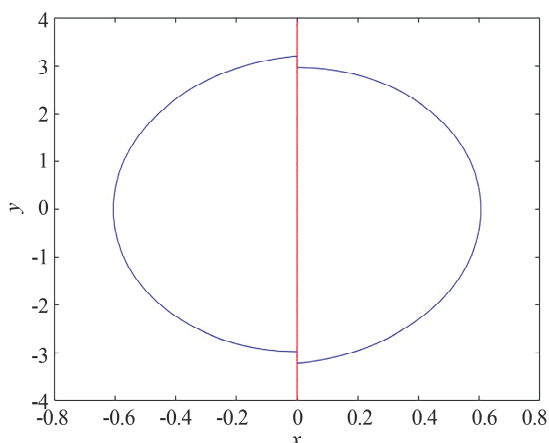


图 2 $(1, 1)$ 型周期吸引子相平面图
Fig. 2 Phase portrait of periodic attractor of type $(1, 1)$

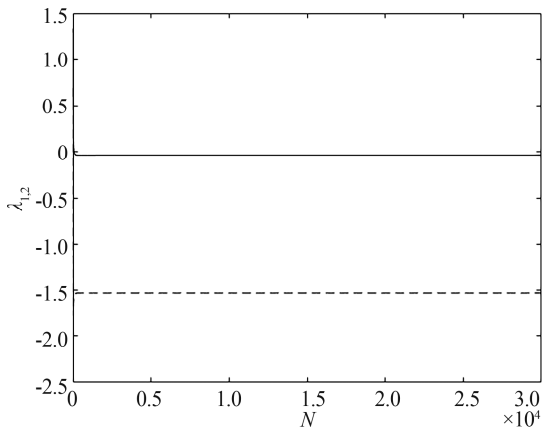


图 3 周期吸引子 Lyapunov 指数谱收敛序列

Fig. 3 Convergence sequence of the spectrum of Lyapunov exponents of periodic attractor

当 $\beta=23.6$ 时, 去除暂态点影响后, 系统吸引子的相平面图如图 4 所示. 为了进一步确认系统是否处于混沌状态, 图 5 展示了该吸引子的 Lyapunov 指数谱序列的收敛情况. 如图所示, 系统在该参数条件下具有一个正的 Lyapunov 指数 $\lambda_1 \approx 0.260$, 由此可说明系统此时正处于混沌状态.

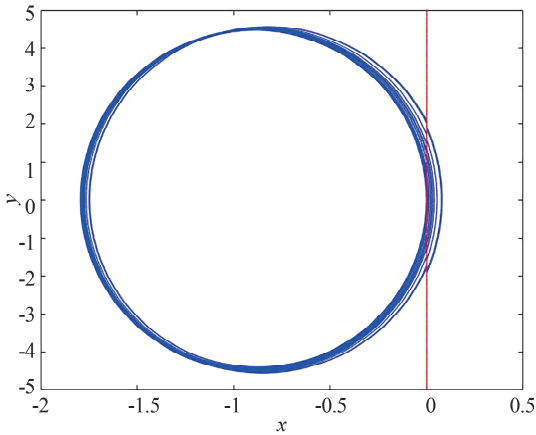


图 4 混沌吸引子相平面图

Fig. 4 Phase portrait of chaotic attractor

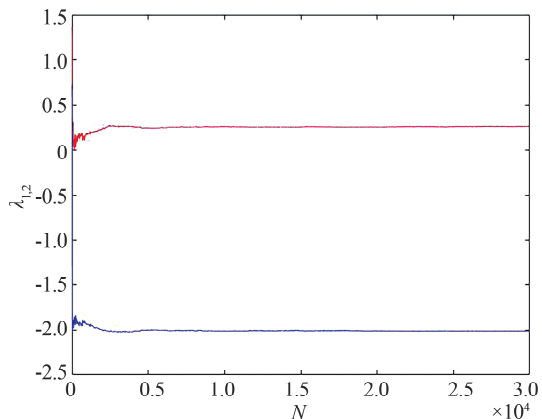


图 5 混沌吸引子 Lyapunov 指数谱收敛序列

Fig. 5 Convergence sequence of the spectrum of Lyapunov exponents of chaotic attractor

通过以上的数值模拟, 我们验证了系统发生异宿分岔后的确会导致混沌.

5 结 论

通过对细长刚体块系统进行数值模拟, 我们证实了文献[7]中关于异宿分岔会导致混沌的猜测. 值得注意的是, 这可能只是该系统产生混沌的必要条件, 因为在相同的参数条件下, 当改变系统初始迭代点时, 其产生的稳态现象可能不同. 此外, 我们推广了文献[4]中一类碰撞振动系统利用 Poincaré 映射计算 Lyapunov 指数谱的方法. 与文献[4]不同的是, 本文所研究的刚体块系统在碰撞面两端的向量场是不同且不连续的, 而这导致了碰撞阶段子映射的 Jacobi 矩阵计算上的差异, 且构建的 Poincaré 映射 P 中包含了两次碰撞过程. 虽然在计算上略显繁杂, 但由于碰撞的特性相同, 因而可将该方法推广至具有多个碰撞面的 Filippov 系统. 同时, 本文利用 Lyapunov 指数谱验证了刚体块系统发生的混沌现象. 数值模拟结果与 Lyapunov 指数计算结果的相容性也证明了我们推广的 Lyapunov 指数计算方法的正确性和有效性.

参考文献:

- [1] Bernardo M D, Budd C J, Champneys A R, *et al.* Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications [M]. London: Springer-Verlag, 2008.
- [2] Cao Q, Léger A, Wiercigroch M. A smooth and discontinuous oscillator: theory, methodology and applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2017.
- [3] Antali M, Havas V, Hogan S J, *et al.* Nonlinear dynamics of a basketball rolling around the rim [J]. Nonlinear Dynam, 2021, 104: 1.
- [4] Jin L, Lu Q S, Twizell E H. A method for calculating the spectrum of Lyapunov exponents by local maps in non-smooth impact-vibrating system [J]. J Sound Vib, 2006, 298: 1019.
- [5] Balcerzak M, Dabrowski A, Blazejczyk-Okolewska B, *et al.* Determining Lyapunov exponents of non-smooth systems: perturbation vectors approach [J]. Mech Syst Signal Pr, 2020, 141: 106734. 1.
- [6] Hogan S J. The effect of damping on rigid block motion under harmonic forcing [J]. P Roy Soc A-Math Phy, 1992, 437: 97.
- [7] Hogan S J. Heteroclinic bifurcations in damped rigid block motion [J]. P Roy Soc A-Math Phy, 1992, 439: 155.

[8] Smoljanovic H, Nikolic Z, Zivaljic N, *et al.* Stability of rigid blocks exposed to single-pulse excitation

[J]. *Acta Mech*, 2016, 227: 1671.

引用本文格式:

中文: 蒋金凯, 杜正东. 细长刚体块系统中的混沌现象及其 Lyapunov 指数谱计算[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2022, 59: 041003.

英文: Jiang J K, Du Z D. Calculation of Lyapunov exponential spectrum of chaotic phenomena in a slender rigid block system [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2022, 59: 041003.