一类分段光滑二次系统中心的极限环分岔

张　庆，杜正东
（四川大学数学学院，成都 610064）

摘　要：本文研究了一类分段二次光滑系统的中心在高阶扰动下的极限环个数. 已有结果显示，此类系统具有 5 组中心条件. 本文从其中一组中心条件出发分析了系统在 8 阶以下参数扰动下所能产生的极限环个数，结果为 6 个，改进了已知结果.

关键词：中心分岔；非光滑系统；高阶扰动；中心；焦点
中图分类号：O175.14　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.061004

Limit cycle bifurcation of center in a class of piecewise smooth quadratic systems

ZHANG Qing，*DU Zheng-Dong*
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we consider the number of limit cycles bifurcated from the weak center of a class of piecewise smooth quadratic systems of focus-parabolic type. It is well known that these systems process five center conditions. Taking one of the center conditions as an example, we show that six limit cycles can bifurcate from the center by perturbing the system parameters up to the order of 8, thus improve the corresponding results.

Keywords: Center bifurcation; Non-smooth system; Higher order perturbation; Center; Focus
(2010 MSC 37G15)

1　引　言

在干摩擦、继电反馈系统等实际应用中，很多问题不能由光滑动力系统来描述，而只能用分段光滑动力系统描述[1-9]. 众所周知，对一个光滑系统而言，极限环的个数和相对位置是动力系统中最重要的问题之一[5]. 在分段光滑动力系统理论中，这个问题同样重要，近年来这方面的研究也越来越多[1-3,5,7-9].

与光滑系统相比，分段光滑系统的极限环更难研究. 比如，光滑线性系统不存在极限环，而分段光滑线性系统却可以产生极限环. 对于如下的平面分段多项式系统：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{cases}(X_n^+(x,y),Y_n^+(x,y))^T, & y>0,\\ (X_n^-(x,y),Y_n^-(x,y))^T, & y<0\end{cases}\tag{1}$$

其中$X_n^{\pm}(x,y)$，$Y_n^{\pm}(x,y)$均为 x，y 的 n 次多项式，设$H^p(n)$为它的极限环的最大个数，当 $n=1,2$ 时，已有研究表明该分段光滑系统有多个极限环，如$H^p(1)\geqslant 3$，$H^p(2)\geqslant 16$[5]. 根据文献[1]，系统(1)的广义焦点型平衡点可分为四种：(i) 焦点-焦点型(FF 型)；(ii)焦点-抛物型(FP 型)；(iii)抛物-焦点型(PF 型)；(iv)抛物-抛物型(PP 型)，其中 PF 型奇点可以通过变量代换化为 FP 型奇点. 文献[3]对具有 FP 型奇点的平面分段光滑二次系统

收稿日期：2021-10-11
基金项目：国家自然科学基金(11971019)
作者简介：张庆(1997－)，男，山西宁武人，硕士研究生，主要研究领域为微分方程动力系统. E-mail：992184127@qq.com
通讯作者：杜正东. E-mail：zdu1985@qq.com

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}\lambda x-y-a_3x^2+(2a_2+a_5)xy+a_6y^2\\ x+\lambda y+a_2x^2+(2a_3+a_4)xy-a_2y^2\end{pmatrix},\\ \quad y>0,\\ \begin{pmatrix}1+b_1x^2+b_2xy+b_3y^2\\ 2x+b_4x^2+b_5xy+b_6y^2\end{pmatrix},\ y<0\end{cases} \tag{2}$$

进行了研究,得到以下 5 组中心条件:

(l_1) $\lambda=a_2=a_5=b_2=b_4=b_6=0$;

(l_2) $\lambda=a_2=a_5=b_4=0, b_2=-2b_6, b_5=-2b_1$;

(l_3) $\lambda=a_4=a_5=0, a_2=\frac{b_4}{2}, b_2=-2b_6, b_5=-2b_1$;

(l_4) $\lambda=a_3=a_6=b_4=0, a_5=-a_2, b_2=-2b_6, b_5=-2b_1$;

(l_5) $\lambda=a_3=a_6=b_2=b_4=b_6=0, a_5=-a_2$,

并在每组中心条件下对系统参数进行线性扰动,进而证明该中心可以产生 5 个极限环.

在本文中,我们以中心条件(l5)为例对系统(2)进行进一步研究. 显然,

$$(\lambda,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6)=(0,5,0,0,-5,0,5,0,6,0,-2,0)$$

是一组满足该条件的参数. 对这组参数进行扰动,我们得到如下系统:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}-y+5xy+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k p_k^+(x,y)\\ x+5x^2-5y^2+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k q_k^+(x,y)\end{pmatrix},\\ \quad y>0,\\ \begin{pmatrix}1+5x^2+6y^2+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k p_k^-(x,y)\\ 2x-2xy+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k q_k^-(x,y)\end{pmatrix},\\ \quad y<0\end{cases} \tag{3}$$

其中

$$p_k^+(x,y)=-a_{3k}x^2+(2a_{2k}+a_{5k})xy+a_{6k}y^2,$$
$$q_k^+(x,y)=a_{2k}x^2+2a_{3k}xy-a_{2k}y^2,$$
$$p_k^-(x,y)=b_{1k}x^2+b_{2k}xy+b_{3k}y^2,$$
$$q_k^-(x,y)=b_{4k}x^2+b_{5k}xy+b_{6k}y^2,$$

$k=1,2,3,\ldots$. 通过对系统(3)的参数进行高阶扰动,我们证明该系统可以产生 6 个极限环,比文献[3]得到的极限环更多.

2 预备知识

称系统(2)对应于 $y>0$ 的子系统为上半系统,对应于 $y<0$ 的子系统为下半系统. 对上半系统,通过极坐标变换 $x=r\cos(\theta)$,$y=r\sin(\theta)$并消去 t,令 $\lambda=0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{R^+(\theta)r^2}{1+\Theta^+(\theta)r}=\sum_{k=2}^{+\infty}R^+(\theta)(\Theta^+(\theta))^{k-2}r^k,\quad \theta\in[0,\pi] \tag{4}$$

其中

$$R^+(\theta)=-a_2\sin^3\theta+(2a_3+a_4+a_6)\cos\theta\sin^2\theta+(3a_2+a_5)\cos^2\theta\sin\theta-a_3\cos^3\theta,$$
$$\Theta^+(\theta)=-a_6\sin^3\theta-(3a_2+a_5)\cos\theta\sin^2\theta+(3a_3+a_4)\cos^2\theta\sin\theta+a_2\cos^3\theta.$$

设(4)式的解为

$$r(\theta,\rho)=r_0(\theta)+r_1(\theta)\rho+r_2(\theta)\rho^2+\cdots.$$

代入(4)式并由初值条件 $r(0,\rho)=\rho$ 可解出$r_0(\pi)$,$r_1(\pi)$,$r_2(\pi)$,$\cdots$. 由此可得上半系统的返回映射 $\Pi^+(\pi,\rho)=r(\pi,\rho)$.

对于下半系统,首先通过变换

$$(x,y,t)\to(-x,-y,t)$$

将下半系统转化为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-b_1x^2-b_2xy-b_3y^2\\ 2x-b_4x^2-b_5xy-b_6y^2\end{pmatrix},\ y>0 \tag{5}$$

正如文献[1]所指出的,对式(5)用普通的极坐标变换后系统在平衡点处可能不解析,因此我们需要采用$(R,\theta,1,2)$型广义极坐标变换,即令

$$x=RCs(\theta),\ y=R^2Sn(\theta),$$

其中 $Cs(\theta)$,$Sn(\theta)$为如下初值问题的解:

$$\begin{cases}\dot{C}s(\theta)=-Sn(\theta),\\ \dot{S}n(\theta)=Cs^3(\theta),\\ Cs(0)=1, Sn(0)=0.\end{cases}$$

易知 $Cs(\theta)$,$Sn(\theta)$均为周期为 2τ 的函数,其中

$$\tau=\frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

将 $x=RCs(\theta)$,$y=R^2Sn(\theta)$代入式(5)并消去 t 可得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}=\sum_{k=1}^{+\infty}T_k(\theta)R^k \tag{6}$$

设方程(6)式的解为 $R(\theta,s)$,并设它有展开式

$$R(\theta,s)-s=\sum_{k=1}^{+\infty}w_k(\theta)s^k,\ w_k(0)=0,\theta\in[0,\tau] \tag{7}$$

引理 2.1[1]　(i) 对(7)式做变量替换

$$r = R\exp\left(-\int_0^\theta T_1(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right)$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \sum_{k=2}^{+\infty} R_k(\theta)\, r^k \tag{8}$$

其中

$$R_k(\theta) = \exp\left((k-1)\int_0^\theta T_1(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right)T_k(\theta).$$

(ii) 若(8)式的解可展开为

$$r(\theta,\rho) - \rho = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(\theta)\,\rho^k, u_k(0) = 0 \tag{9}$$

则(6)式的解为

$$R(\theta,s) = s + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k(\theta)\, s^k = \exp\left(\int_0^\theta T_1(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right)\left[s + \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(\theta)\, s^k\right] \tag{10}$$

且 $w_1(\tau)=0, w_k(\tau)=u_k(\tau), k\geqslant 2$.

引理 2.2[1]　令 $\Delta\theta = Cs^2(\theta)+Sn(\theta)$. 若对正整数 m,l 以及正数 n 有 $2n=m+2l+3$，则

$$\int \frac{Cs^m(\theta)\cdot Sn^1(\theta)}{[\Delta\theta]^n}\mathrm{d}\theta = \sum_{i=0}^{l}(-1)^i\cdot\binom{l}{i}\cdot\Lambda(\theta,l-i-n+1)+C,$$

其中 $\Lambda(\theta,k)=\dfrac{[\Delta\theta]^k}{k\cdot Cs^{2k}(\theta)}$，$C$ 为积分常数.

由引理 2.1 和 2.2，我们可计算下半系统的返回映射 $\Pi^-(\tau,\rho)=R(\tau,\rho)$，由此可得系统(2)的距离函数

$$d(\rho) = \Pi^-(\tau,\Pi^+(\pi,\rho)) - \rho = \sum_{i=1}^{+\infty} V_i\,\rho^i \tag{11}$$

由此我们可定义细中心和细焦点.

定义 2.3　称 V_i 为系统(2)的第 i 阶 Lyapunov 量. 若对任意 $i\geqslant 1$ 有 $V_i=0$，则称(0,0)为系统(2)的细中心. 若对 $i=1,2,\cdots,k$ 有 $V_i=0$ 且 $i=k+1$ 有 $V_i\neq 0$，则称(0,0)为(2)的 k 阶细焦点.

通过计算系统(3)的 Lyapunov 量可得

$$d(\rho) = \rho\sum_{i=1}^{m} V_{1i}\,\varepsilon^i + \rho^2\sum_{i=1}^{m} V_{2i}\,\varepsilon^i + \cdots + \rho^k\sum_{i=1}^{m} V_{ki}\,\varepsilon^i + \cdots = \varepsilon\sum_{i=1}^{+\infty} V_{i1}\,\rho^i + \varepsilon^2\sum_{i=1}^{+\infty} V_{i2}\,\rho^i + \cdots = \sum_{j=1}^{+\infty}\varepsilon^j\,\Upsilon(j) \tag{12}$$

其中

$$\Upsilon(j) = \sum_{i=1}^{+\infty} V_{ij}\,\rho^i.$$

引理 2.4[2]　设对 $K=1$ 或对 $k\in\mathbf{N}$ 及 $1\leqslant k<K$ 有 $\Upsilon(k)\equiv 0$，且 $V_{2K},V_{3K},\cdots,V_{mK}$ 关于 $\delta=(a_{2K},a_{3K},\ldots,b_{6K})$ 是线性的. 若对正整数 $m\geqslant 2, n\geqslant 1$ 有

(i) $\operatorname{rank}\left[\dfrac{\partial(V_{2K},V_{3K},\cdots,V_{mK})}{\partial(a_{2K},a_{3K},\cdots,b_{6K})}\right]=n$;

(ii) 若 $V_{2K}=V_{3K}=\cdots=V_{mK}=0$，则 $\Upsilon(K)\equiv 0$，

则对任意 $N>0$，都存在一个原点的小邻域 V 以及 $\varepsilon_0>0$，使得对 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0, |\delta|\leqslant N$，在 V 中可产生 n 个极限环. 此外，对一些(ε,δ)值，这 n 个极限环可以出现在原点的任意邻域内.

为了研究 $\Upsilon(K)$，我们需要利用(3)的首次积分表达式，即找到 $H_K^{\pm}(x,y,\varepsilon)$，使得对系统(3)的上下半系统分别有

$$\frac{\partial H_K^{\pm}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H_K^{\pm}}{\partial y}\dot{y} = O(\varepsilon^{K+1}),$$

这里 H_K^+，H_K^- 分别表示上下半系统的首次积分.

3　主要结果

记

$$\Phi_m(k) = \operatorname{rank}\left[\frac{\partial(V_{2k},V_{3k},\cdots,V_{mk})}{\partial(a_{2k},a_{3k},\cdots,b_{6k})}\right].$$

通过第二节中的方法，我们可建立高阶扰动并研究其极限环个数，由此可得到本文的主要结果.

定理 3.1　对系统(3)，通过 $\varepsilon^1,\varepsilon^3,\varepsilon^5,\varepsilon^7$ 阶扰动可产生 5 个极限环，通过 $\varepsilon^2,\varepsilon^4,\varepsilon^6,\varepsilon^8$ 阶扰动可产生 6 个极限环.

证明　利用文献[3]中计算焦点量的方法和 Maple 软件，我们有

$$V_{21} = \frac{2a_{21}}{3} + \frac{2a_{51}}{3} - \frac{b_{41}}{3}.$$

令 $V_{21}=0$ 可解得

$$b_{41} = 2a_{21} + 2a_{51} \tag{13}$$

同理可得

$$V_{31} = \frac{5\pi a_{31}}{8} - \frac{5\pi a_{61}}{8},$$

令 $V_{31}=0$ 得

$$a_{61} = a_{31} \tag{14}$$

将(13)(14)式代入(3)式，计算可得

$$V_{41} = -\frac{8b_{61}}{15} - \frac{4b_{21}}{15} + \frac{34a_{21}}{15} + \frac{34a_{51}}{15}.$$

令 $V_{41}=0$ 得

$$b_{21} = -2b_{61} + \frac{17a_{21}}{2} + \frac{17a_{51}}{2} \tag{15}$$

将(13)~(15)式代入(3)式得

$$V_{51} = 0,$$

$$V_{61}=\frac{662\, a_{51}}{15}-\frac{64\, b_{61}}{105}+\frac{662\, a_{21}}{15}.$$

令$V_{61}=0$得

$$b_{61}=\frac{2317\, a_{51}}{32}+\frac{2317\, a_{21}}{32} \tag{16}$$

因此,(15)式可化简为

$$b_{21}=-\frac{2181\, a_{21}}{16}-\frac{2181\, a_{51}}{16} \tag{17}$$

将(13)(14)及(16)(17)式代入(3)式,得

$$V_{71}=0,$$

$$V_{81}=\frac{220202\, a_{51}}{315}+\frac{220202\, a_{21}}{315}.$$

由$V_{81}=0$得

$$a_{51}=-a_{21} \tag{18}$$

将(18)式代入(13)(16)(17)式,化简可得

$$b_{41}=0, b_{61}=0, b_{21}=0 \tag{19}$$

最后,将(14)(18)(19)式代入(3)式可得$V_{91}=V_{101}=0$. 此时,系统(3)的上半系统的首次积分为

$$H_1^+=\frac{\varepsilon}{2000}[2\sqrt{2}a_{31}(25\,x^2-50\,y^2+10x+1)(5x-1\,)^2 ln\left(\frac{(5x-1)(5x-5\sqrt{2}\,y+1)}{5}\right)+\sqrt{2}\ln(2)a_{31}(5x-1\,)^2(25\,x^2-50\,y^2+10x+1)+625\,a_{31}(-28\,x^3y+16x\,y^3)-100\,a_{31}xy-800\,a_{21}(x^2+y^2)+20\,a_{31}y+16\,a_{21}+125\,a_{31}(28\,x^2y-16\,y^3)+4000\,a_{21}x\,y^2]-\frac{25}{2}x^4-10x\,y^2+x^2+y^2+25\,x^2y^2,$$

下半系统的首次积分为

$$H_1^-=\frac{\varepsilon}{35}[(57600\,b_{11}-67200\,b_{31}+950400\,b_{51})y^7+(-246400\,b_{11}+313600\,b_{31}-3438400\,b_{51})y^6+(1176000\,b_{51}x^2+400512\,b_{11}-564480\,b_{31}+4576320\,b_{51})y^5+(-4704000\,b_{51}x^2-322560\,b_{11}+470400\,b_{31}-2923200\,b_{51})y^4+(7056000\,b_{51}x^2+197120\,b_{11}-156800\,b_{31}+1433600\,b_{51})y^3-32512\,b_{11}+4480\,b_{31}-6720(2\,b_{11}+5\,b_{51})(35\,x^2+30\,y^2+10y+9)(y-1\,)^5(\ln(1-y)+\ln(2))+6080\,b_{51}+35+(1176000\,b_{51}x^2+120960\,b_{11}+302400\,b_{51})y-(4704000\,b_{51}x^2+174720\,b_{11}+907200\,b_{51})y^2]+(420\,x^2+360\,y^2+120y+108)(-2y+2\,)^5.$$

因此,若$V_{21}=V_{31}=\cdots=V_{101}=0$,则对所有的正整数$i$有$V_{i1}=0$,即所有的$\varepsilon^1$阶项全部消失. 同时,我们有$\Phi_{10}(1)=5$. 由引理 2.4,此时通过一阶线性扰动可产生 5 个极限环,且参数所满足的条件为

$$b_{21}=0, b_{41}=0, b_{61}=0, a_{61}=a_{31}, a_{51}=-a_{21} \tag{20}$$

将(20)式代入$Y(2)$中,同理由$V_{22}=V_{32}=\cdots=V_{92}=0$可解得条件

$$\begin{cases} b_{42}=\dfrac{563880\, a_{61}^2}{110101}, \\ b_{62}=\dfrac{146612355\, a_{61}^2}{1761616}, \\ a_{62}=a_{32}, \\ b_{22}=-\dfrac{134046495\, a_{61}^2}{880808}, \\ a_{52}=-a_{22}+\dfrac{281940\, a_{61}^2}{110101} \end{cases} \tag{21}$$

将(21)式代入V_{102}可得

$$V_{102}=-\frac{67068921496\, a_{61}^2}{3633333}.$$

因此,若$a_{61}\neq 0$,则有$V_{102}\neq 0$,且计算可得$\Phi_9(2)=5$. 由条件

$$b_{22}=0, b_{42}=0, b_{62}=0, a_{62}=a_{32}, a_{52}=-a_{22}, a_{61}=0 \tag{22}$$

可得

$$V_{22}=V_{32}=\cdots=V_{102}=0.$$

且通过扰动可产生 6 个极限环. 同理,可建立上下半系统的首次积分H_2^+,H_2^-. 故所有的ε^2阶项全部消失.

同理,将(20)(22)式代入$Y(3)$中,令$V_{23}=V_{33}=\cdots=V_{103}=0$,可得条件

$$b_{23}=0, b_{43}=0, b_{63}=0, a_{63}=a_{33}, a_{53}=-a_{23} \tag{23}$$

此时有$\Phi_{10}(3)=5$. 同样可建立上下半平面的首次积分. 因此所有的ε^3阶项全部消失且系统(3)可产生 5 个极限环. 然后,将式(20)(22)(23)代入$Y(4)$中,令$V_{23}=V_{33}=\cdots=V_{93}=0$,可得条件

$$\begin{cases} b_{44}=\dfrac{563880\,a_{62}^2}{110101}, \\ b_{64}=\dfrac{146612355\,a_{62}^2}{1761616}, \\ a_{64}=a_{34}, \\ b_{24}=-\dfrac{134046495\,a_{62}^2}{880808}, \\ a_{54}=-a_{24}+\dfrac{281940\,a_{62}^2}{110101} \end{cases} \tag{24}$$

再将(24)式代入V_{104}可得

$$V_{104}=-\frac{67068921496\,a_{62}^2}{3633333}.$$

因此，若$a_{62}\neq 0$，则$V_{104}\neq 0$. 又因为$\Phi_9(4)=5$，故系统(3)可产生 6 个极限环. 此时有条件

$$b_{24}=0, b_{44}=0, b_{64}=0, a_{64}=a_{34},$$
$$a_{54}=-a_{24}, a_{62}=0.$$

对系统(3)的$\varepsilon^5\sim\varepsilon^8$阶扰动与$\varepsilon^1\sim\varepsilon^4$阶扰动的分析类似. 我们同样可以在$\varepsilon^5$，$\varepsilon^7$阶扰动下得到 5 个极限环，在$\varepsilon^6$，$\varepsilon^8$阶扰动下得到 6 个极限环. 证毕.

4　结　论

本文首先对系统(2)在中心条件(l_5)下的参数进行扰动，得到系统(3)；然后通过对系统(3)分别建立$\varepsilon^1\sim\varepsilon^8$阶参数扰动下的 Lyapunov 量，分析得到了 6 个极限环. 同理，我们在其他 4 组中心条件下也进行了高阶扰动分析，在条件(l_1)(l_2)(l_3)下仍然得到 5 个极限环，但在(l_4)下同样也可以得到 6 个极限环.

参考文献：

[1] Coll B, Gasull A, Prohens R. Degenerate Hopf bifurcations in discontinuous planar systems [J]. J Math Anal Appl, 2001, 253: 671.

[2] Tian Y, Yu P. Bifurcation of small limit cycles in cubic integrable systems using higher-order analysis [J]. J Differ Equations, 2018, 264: 5950.

[3] Sun L, Du Z. Limit cycles of planar piecewise smooth quadratic systems with focus-parabolic type critical points [J]. Int J Bifurcat Chaos, 2021, 31: 2150090.

[4] Bernardo M D, Budd C J, Champneys A R, *et al*. Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications [M]. London: Springer-Verlag, 2008.

[5] Cruz L, Novaes D D, Torregrosa J. New lower bound for the Hilbert number in piecewise quadratic differential systems [J]. J Differ Equations, 2019, 266: 4170.

[6] 方之昊，陈兴武. 反向 II 型 fold-fold 的正则化系统的动力学分析[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：051002.

[7] 罗艳红，陈兴武. 具有对称实焦点的分段线性类-Lienard 系统的穿越周期轨[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：041005.

[8] Chen X, Du Z. Limit cycles bifurcate from centers of discontinuous quadratic systems [J]. Comput Math Appl, 2010, 59: 3836.

[9] Zou Y, Kupper T, Beyn W J. Generalized Hopf bifurcation for planar Filippov systems continuous at the origin [J]. J Nonlinear Sci, 2006, 16: 159.

引用本文格式：

中　文：张庆，杜正东. 一类分段光滑二次系统中心的极限环分岔[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：061004.

英　文：Zhang Q, Du Z D. Limit cycle bifurcation of center in a class of piecewise smooth quadratic systems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 061004.