2017 年 5 月 四川大学学报(自然科学版) May. 2017
第 54 卷 第 3 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 54 No. 3

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.03.018

El-Nabulsi 模型下非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether 定理

周小三[1]，张　毅[2]

(1. 苏州科技学院数理学院，苏州 215009；2. 苏州科技学院土木工程学院，苏州 215011)

摘　要：研究 El-Nabulsi 模型下基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether 定理. 建立了基于指数 Lagrange 函数和 Lagrange 函数幂函数等两种非标准 Lagrange 函数的 Hamilton 原理，得到了系统的 Euler-Lagrange 方程；依据 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性，给出了 Noether 对称变换与准对称变换的条件，建立了动力学系统基于非标准 Lagrange 函数的 Noether 定理. 文末举例说明结果的应用.

关键词：非标准 Lagrange 函数；Hamilton 原理；Noether 定理；El-Nabulsi 模型

中图分类号：O316　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)03-0535-06

Noether theorems for dynamical systems with non-standard Lagrangians based on El-Nabulsi models

ZHOU Xiao-San[1], *ZHANG Yi*[2]

(1. College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China;
2. College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215011, China)

Abstract: The Noether theorems for dynamical systems with non-standard Lagrangians based on El-Nabulsi models are studied. The Hamilton principles with exponential Lagrangians and power law Lagrangians are established respectively, and the Euler-Lagrange equations of the systems are obtained. The formulation of the conditions of Noether (quasi-) symmetrical transformations are given in terms of invariance of Hamilton action under infinitesimal transformation, the Noether theorems of dynamical systems with non-standard Lagrangians are established. At the end of the article, two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords: Non-standard Lagrangians; Hamilton principle; Noether theorem; El-Nabulsi model

1　引　言

动力学系统的守恒量与其内在的对称性之间存在潜在的关系，Noether[1] 在 1918 年提出的不变性揭示了这一重要关系. 之后，学者们以经典的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数为基础，对 Noether 对称性加以推广. 1972 年，Candttie 等[2] 提出了 Noether 定理的逆定理；1981 年，李子平[3] 给出了线性非完整约束下的 Noether 定理；1990 年，刘端[4] 研究了非完整非保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理；2014 年，龙梓轩和张毅[5-6] 研究了 El-Nabulsi 模型下分数阶 Noether

收稿日期：2015-10-29
基金项目：国家自然科学基金(10972151,11272227,11572212)
作者简介：周小三(1990－)，女，安徽宿州人，硕士研究生，研究方向：力学中的数学方法.
通讯作者：张毅. E-mail：zhy@mail.usts.edu.cn

定理. 近年来，基于经典 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether 对称性的研究已逐渐完善[7-9]，而基于非标准 Lagrange 函数的研究尚未受到关注. 事实上，基于非标准 Lagrange 函数的动力学理论及其应用可追溯到 1984 年，Yang-Mills 场论[10]中讨论关于经典理论的全区适应性时发现非标准 Lagrange 函数与颜色约束问题具有直接关系. 这使得非标准 Lagrange 函数获得关注. 到目前为止，关于非标准 Lagrange 函数在经典耗散系统[11-18]，理论物理[19-22]，非线性微分方程[23-25]等领域应用的研究已取得重要成果. 不同于经典的 Lagrange 函数，非标准 Lagrange 函数形式没有动能和势能的明显区分，可以是指数形式或幂函数形式等，其优势在于可以更方便地描述非线性动力学问题.

本文将研究 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数和 Lagrange 函数幂函数的动力学系统的 Noether 对称性与守恒量. 通过建立基于非标准 Lagrange 函数的 Hamilton 原理并导出系统的 Euler-Lagrange 方程，给出 Noether 对称变换与准对称变换的条件，进而建立基于指数 Lagrange 函数和 Lagrange 函数幂函数的 Noether 定理.

2 基于指数 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether 定理

2.1 Euler-Lagrange 方程

假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定，在 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的 Hamilton 作用量为

$$S(\gamma,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\exp[L(\tau,q_s,\dot{q}_s)](t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

其中 $L=L(\tau,q_s,\dot{q}_s)$ 为经典 Lagrange 函数，γ 为某曲线，Γ 是 Euler-Gamma 函数，α 是实数或复数，t 是观察者时间，τ 是固有时间，$t\neq\tau$，函数 L 是其变量的 C^2 类函数.

El-Nabulsi 模型下 Hamilton 原理可表示为

$$\delta S=\delta\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\exp[L(\tau,q_s,\dot{q}_s)](t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau=0 \tag{2}$$

且满足交换关系

$$\mathrm{d}\delta q_s=\delta\mathrm{d}q_s \tag{3}$$

以及边界条件

$$\delta q_s\big|_{t=t_1}=\delta q_s\big|_{t=t_2}=0\ (s=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

由于

$$\delta[\exp(L)(t-\tau)^{\alpha-1}]=(t-\tau)^{\alpha-1}\exp(L)\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left((t-\tau)^{\alpha-1}\exp(L)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right) \tag{5}$$

将(5)式代入(2)式，并利用条件(4)得到

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t-\tau)^{\alpha-1}\exp(L)\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s\mathrm{d}\tau=0 \tag{6}$$

由区间的任意性和 δq_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 的独立性，有

$$(t-\tau)^{\alpha-1}\exp(L)\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)=0 \tag{7}$$

方程(7)称为 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的动力学系统的 Euler-Lagrange 方程.

2.2 Noether 对称性

引进时间 τ 和广义坐标 q_s 的无限小变换

$$\tau^*=\tau+\Delta\tau,\ q_s^*(\tau^*)=q_s(\tau)+\Delta q_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

展开式为

$$\tau^*=\tau+\varepsilon_\sigma\zeta^\sigma(\tau,q_k,\dot{q}_k),$$

$$q_s^*(\tau^*)=q_s(\tau)+\varepsilon_\sigma\xi_s^\sigma(\tau,q_k,\dot{q}_k) \tag{9}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无限小参数，ζ^σ，ξ_s^σ 为无限小变换的生成元或生成函数. 在变换(8)下，曲线 γ 变为邻近曲线 γ^*，相应的作用量变为 $S(\gamma^*)$，设 ΔS 为差 $S(\gamma^*)-S(\gamma)$ 相对 ε 的主线性部分，则有

$$\Delta S=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\exp L\cdot(t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial\tau}+\frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\Delta\tau+\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

注意到全变分与等时变分之间有如下关系：

$$\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s \Delta\tau, \Delta\dot{q}_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta q_s) - \dot{q}_s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) \tag{11}$$

则(10)式可表示为

$$\Delta S = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_\sigma \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\zeta^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s^\sigma - \dot{q}_s\zeta^\sigma)\right)\right] + \exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)(\xi_s^\sigma - \dot{q}_s\zeta^\sigma)\right\}\mathrm{d}\tau \tag{12}$$

式(10)和式(12)称为 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的 Hamilton 作用量变分的两个基本公式.

由式(10)可知:如果满足

$$\exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \tau} + \frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\Delta\tau + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau)\right\} = 0 \tag{13}$$

则变换(8)称为 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的 Noether 对称变换. 式(13)可写成

$$\exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \tau} + \frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\zeta^\sigma + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s^\sigma - \dot{q}_s\dot{\zeta}^\sigma) + \dot{\zeta}^\sigma\right\} = 0 \tag{14}$$

式(14)称为 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的 Noether 等式.

如果存在函数 $G = G(\tau, q_s, \dot{q}_s)$，使得

$$\exp(L)(t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \tau} + \frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\Delta\tau + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau)\right\} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G) = 0 \tag{15}$$

成立,则变换(8)称为 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的 Noether 准对称变换. 式(15)可表示为

$$\exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \tau} + \frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\zeta^\sigma + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s^\sigma - \dot{q}_s\dot{\zeta}^\sigma) + \dot{\zeta}^\sigma\right\} + \dot{G}^\sigma = 0 \tag{16}$$

其中 $\Delta G = \varepsilon_\sigma G^\sigma$,$G^\sigma$ 为规范函数，式(16)称为 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的广义 Noether 等式.

2.3 Noether 定理

在 Noether 对称变换下,由式(12)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\zeta^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s^\sigma - \dot{q}_s\zeta^\sigma)\right)\right] + \exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{dL}{d\tau} + \frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)(\xi_s^\sigma - \dot{q}_s\zeta^\sigma) = 0 \tag{17}$$

由式(17),并利用系统的 Euler-Lagrange 方程(7),得到守恒量

$$I^\sigma = \exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\zeta^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s^\sigma - \dot{q}_s\zeta^\sigma)\right) = \text{const.}\ (\sigma = 1, 2, \cdots, r) \tag{18}$$

而在 Noether 准对称变换下,有守恒量

$$I^\sigma = \exp L \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\zeta^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s^\sigma - \dot{q}_s\zeta^\sigma)\right) + G^\sigma = \text{const.}\ (\sigma = 1, 2, \cdots, r) \tag{19}$$

于是有

定理 1　如果无限小生成元 ζ^σ，ξ_s^σ 满足 Noether 等式(14)，则 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的动力学系统(7)存在 r 个线性独立的 Noether 守恒量式(18).

定理 2　如果无限小生成元 ζ^σ，ξ_s^σ 和规范函数 G^σ 满足广义 Noether 等式(16)，则 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数的动力学系统(7)存在 r 个线性独立的 Noether 守恒量式(19).

2.4 算　例

设某动力学系统的 Hamilton 作用量为

$$S = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2} \exp(\tau q\dot{q})(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau \tag{20}$$

方程(7)给出

$$(t-\tau)^{\alpha-1}e^{\tau q\dot{q}}\left[\tau q\left(\frac{\alpha-1}{t-\tau} - \dot{q}q - \tau\dot{q}^2 - \tau q\ddot{q}\right) - q\right] = 0 \tag{21}$$

试研究该系统的 Noether 对称性与守恒量.

由广义 Noether 等式(16),得到

$$\left(\dot{q}q + \frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\zeta + \tau\dot{q}\xi + \tau q(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\zeta}) + \dot{\zeta} + e^{-\tau q\dot{q}}\dot{G}^\sigma(t-\tau)^{1-\alpha} = 0 \tag{22}$$

方程(22)有解

$$\zeta^1 = 0,\quad \xi^1 = \frac{1}{q},\quad G^1 = 0 \tag{23}$$

$$\zeta^2=1,\quad \xi^2=\dot{q},\quad G^2=-e^{\tau q\dot{q}}(t-\tau)^{\alpha-1} \tag{24}$$

生成元(23)对应于系统的 Noether 对称性,(24)对应于系统的 Noether 准对称性. 由 Noether 定理,系统有如下守恒量

$$I^1=\tau e^{\tau q\dot{q}}(t-\tau)^{\alpha-1}=\text{const.} \tag{25}$$

$$I^2=0 \tag{26}$$

守恒量(26)是平庸的.

3 基于 Lagrange 函数幂函数的动力学系统的 Noether 定理

3.1 Euler-Lagrange 方程

在 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数 $L^{1+\gamma}=L^{1+\gamma}(\tau,q_s,\dot{q}_s)$ 的 Hamilton 作用量为[16]

$$\tilde{S}(\chi,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}[L^{1+\gamma}(\tau,q_s,\dot{q}_s)](t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau \tag{27}$$

其中,$L=L(t,q_s,\dot{q}_s)$为经典 Lagrange 函数,χ 为某曲线,Γ 是 Euler-Gamma 函数,α 是实数或复数,t 是观察者时间,τ 是固有时间,$t\neq\tau$,函数 L 是其变量的 C^2 类函数.

El-Nabulsi 模型下 Hamilton 原理可表示为

$$\delta\tilde{S}=\delta\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}[L^{1+\gamma}(\tau,q_s,\dot{q}_s)](t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau=0 \tag{28}$$

且满足交换关系

$$\mathrm{d}\delta q_s=\delta\mathrm{d}q_s \tag{29}$$

以及边界条件

$$\delta q_s\big|_{t=t_1}=\delta q_s\big|_{t=t_2}=0\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{30}$$

因为

$$\begin{aligned}\delta[L^{1+\gamma}\cdot(t-\tau)^{\alpha-1}]=\;&(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Big)-\\&\frac{\gamma}{L}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Big)\delta q_s+\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big((1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\Big)\end{aligned} \tag{31}$$

将(31)式代入(28)式,并利用条件(30)得到

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\gamma}{L}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Big)\delta q_s\mathrm{d}\tau=0 \tag{32}$$

由区间的任意性和 $\delta q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 的独立性,有

$$(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\gamma}{L}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Big)=0 \tag{33}$$

方程(33)称为 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数的动力学系统的 Euler-Lagrange 方程[16]。

3.2 Noether 对称性

在无限小变换(8)下,计算变分 $\Delta\tilde{S}$,有

$$\Delta\tilde{S}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\Big\{\Big(\frac{\partial L}{\partial\tau}+\frac{L}{1+\gamma}\frac{1-\alpha}{t-\tau}\Big)\Delta\tau+\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s+\frac{L}{1+\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau)\Big\}\mathrm{d}\tau \tag{34}$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{S}=\;&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\sigma\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big[(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\Big(L\zeta^\sigma+(1+\gamma)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^\sigma-\dot{q}_s\zeta^\sigma)\Big)\Big]+\\&(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\gamma}{L}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Big)(\xi_s^\sigma-\dot{q}_s\zeta^\sigma)\Big\}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{35}$$

式(34)和式(35)称为 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数的 Hamilton 作用量变分的两个基本公式。

由式(34)知:如果满足

$$\begin{aligned}&(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\Big\{\Big(\frac{\partial L}{\partial\tau}+\frac{L}{1+\gamma}\frac{1-\alpha}{t-\tau}\Big)\Delta\tau+\\&\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s+\frac{L}{1+\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau)\Big\}=0\end{aligned} \tag{36}$$

则变换(8)称为 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数的 Noether 对称变换. 式(36)可写成

$$(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial\tau}+\frac{L}{1+\gamma}\frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\zeta^{\sigma}+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^{\sigma}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s^{\sigma}-\dot{q}_s\dot{\zeta}^{\sigma})+\frac{L}{1+\gamma}\dot{\zeta}^{\sigma}\right\}=0 \quad (37)$$

式(37)称为 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数的 Noether 等式.

如果存在函数 $G=G(\tau,q_s,\dot{q}_s)$，使得

$$(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial\tau}+\frac{L}{1+\gamma}\frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\Delta\tau+\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s+\frac{L}{1+\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau)\right\}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G)=0 \quad (38)$$

成立，则变换(8)称为 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数的 Noether 准对称变换. 式(38)可表示为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\tau}+\frac{L}{1+\gamma}\frac{1-\alpha}{t-\tau}\right)\zeta^{\sigma}+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^{\sigma}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s^{\sigma}-\dot{q}_s\dot{\zeta}^{\sigma})+\frac{L}{1+\gamma}\dot{\zeta}^{\sigma}+\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1+\gamma)L^{\gamma}}\dot{G}^{\sigma}=0 \quad (39)$$

其中 $\Delta G=\varepsilon_\sigma G^{\sigma}$，$G^{\sigma}$ 为规范函数，式(39)称为 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数的广义 Noether 等式.

3.3　Noether 定理

在 Noether 对称变换下，由式(35)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\left(L\zeta^{\sigma}+(1+\gamma)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{\sigma}-\dot{q}_s\zeta^{\sigma})\right)\right]+(1+\gamma)(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\gamma}{L}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\alpha-1}{t-\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)(\xi_s^{\sigma}-\dot{q}_s\zeta^{\sigma})=0 \quad (40)$$

由式(40)，并利用系统的 Euler-Lagrange 方程(33)，得到守恒量

$$I^{\sigma}=(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\left(L\zeta^{\sigma}+(1+\gamma)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{\sigma}-\dot{q}_s\zeta^{\sigma})\right)=\text{const.}\ (\sigma=1,2,\cdots,r) \quad (41)$$

而在 Noether 准对称变换下，有守恒量

$$I^{\sigma}=(t-\tau)^{\alpha-1}L^{\gamma}\left(L\zeta^{\sigma}+(1+\gamma)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{\sigma}-\dot{q}_s\zeta^{\sigma})\right)+G^{\sigma}=\text{const.}\ (\sigma=1,2,\cdots,r) \quad (42)$$

于是有

定理 3　如果无限小生成元 ζ^{σ}，ξ_s^{σ} 满足 Noether 等式(37)，则 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数的动力学系统(33)存在 r 个线性独立的 Noether 守恒量式(41).

定理 4　如果无限小生成元 ζ^{σ}，ξ_s^{σ} 和规范函数 G^{σ} 满足广义 Noether 等式(39)，则 El-Nabulsi 模型下基于 Lagrange 函数幂函数的动力学系统(33)存在 r 个线性独立的 Noether 守恒量式(42).

3.4　算　例

设动力学系统的 Hamilton 作用量为

$$\tilde{S}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}[\dot{q}-q(\tau-t)]^2(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau \quad (43)$$

方程(33)给出

$$\ddot{q}-\frac{\alpha-1}{t-\tau}\dot{q}-((\tau-t)^2+\alpha)q=0 \quad (44)$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

由广义 Noether 等式(39)，得到

$$\left(\frac{\dot{q}}{2}\frac{1-\alpha}{t-\tau}-\frac{q}{2}(1+\alpha)\right)\zeta-(\tau-t)\xi+\dot{\xi}-\frac{\dot{q}+q(\tau-t)}{2}\dot{\zeta}+\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{2(\dot{q}-q(\tau-t))}\dot{G}^{\sigma}=0 \quad (45)$$

方程(45)有解

$$\zeta=0,\quad \xi=e^{\frac{1}{2}(\tau-t)^2},\quad G=0 \quad (46)$$

生成元(46)对应于系统的 Noether 对称性. 由 Noether 定理，系统有如下守恒量

$$I^1=2[\dot{q}-q(\tau-t)]e^{\frac{1}{2}(\tau-t)^2}(t-\tau)^{\alpha-1}=\text{const.} \quad (47)$$

4　结　语

文章研究了 El-Nabulsi 模型下基于指数 Lagrange 函数和 Lagrange 函数幂函数的 Noether 理论，揭示了基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的守恒量与其内在的对称性间的关系. 本文的方法具有普遍意义，可推广到相空间中约束力学系统[26]或进一步研究 El-Nabulsi 模型下基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Lie 对称性与 Mei 对称性等.

参考文献：

[1]　Noether A E. Invariante variations probleme [J]. Nachr Akad Wiss GÖttingen Math Phys, 1918, KI, II: 235.

[2]　Candotti E, Palmieri C, Vitale B. On the inversion of Noether's theorem in classical dynamical systems [J]. Amer J Phys, 1972, 40: 424.

[3]　李子平. 约束系统的变换性质 [J]. 物理学报，

1981, 30: 1659.

[4] 刘端. 非完整非保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理 [J]. 中国科学: A 辑, 1990, 11: 1189.

[5] Long Z X, Zhang Y. Noether's theorem for fractional variational problem from El-Nabulsi extended exponentially fractional integral in phase space [J]. Acta Mech, 2014, 225: 77.

[6] Long Z X, Zhang Y. Fractional Noether theorem based on extended exponentially fractional integral [J]. Int J Theor Phys, 2014, 53: 841.

[7] 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量 [J]. 力学进展, 1993, 23: 360.

[8] 葛伟宽, 梅凤翔. 作战微分方程模型的 Noether 对称性 [J]. 兵工学报, 2001, 22: 241.

[9] 梅凤翔. 分析力学 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2013.

[10] Alekseev A I, Arbuzov B A. Classical Yang-Mills field theory with nonstandard Lagrangians [J]. Theor Math Phys, 1984, 59: 372.

[11] El-Nabulsi A R. A fractional approach to nonconservative Lagrangian dynamical systems [J]. Fizika A, 2005, 14: 289.

[12] Cieśliński J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangians for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients [J]. J Phys A: Math Theor, 2010, 43: 1489.

[13] Musielak Z E. Standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems with variable coefficients [J]. J Phys A: Math Theor, 2008, 41: 295.

[14] Musielak Z E. General conditions for the existence of non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems [J]. Chaos Soliton Fract, 2009, 42: 2645.

[15] El-Nabulsi A R. Non-linear dynamics with non-standard Lagrangians [J]. Qual Theor Dyn Syst, 2013, 12: 273.

[16] El-Nabulsi R A. Non-standard fractional Lagrangians [J]. Nonlinear Dyn, 2013, 74: 381.

[17] El-Nabulsi R A. Fractional oscillators from non-standard Lagrangians and time-dependent fractional exponent [J]. Comput Appl Math, 2014, 33: 163.

[18] 余跃玉, 周均, 胡兵. 带阻尼项的时间分数阶波动方程的一种差分方法 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2014, 51: 007.

[19] El-Nabulsi A R, Soulati T, Rezazadeh H. Non-standard complex Lagrangian dynamics [J]. J Adv Res Dyn Control Sys, 2013, 5: 50.

[20] El-Nabulsi R A. Non-standard non-local-in-time Lagrangians in classical mechanics [J]. Qual Theor Dyn Syst, 2014, 13: 149.

[21] El-Nabulsi A R. Quantum field theory from an exponential action functional [J]. Indian J Phys, 2013, 87: 379.

[22] El-Nabulsi A R. Modified Proca equation and modified dispersion relation from a power-law Lagrangian functional [J]. Indian J Phys, 2013, 87: 465.

[23] Cariñena J F, Ranada M F, Santander M. Lagrangian formalism for nonlinear second-order Riccati systems: one-dimensional integrability and two-dimensional super integrability [J]. J Math Phys, 2005, 46: 547.

[24] Chandrasekar V K, Pandey S N, Senthilvelan M, *et al*. A simple and unified approach to identify integrable nonlinear oscillators and systems [J]. J Math Phys, 2006, 47: 109.

[25] Chandrasekar V K, Senthilvelan M, Lakshmanan M. On the Lagrangian and Hamiltonian description of the damped linear harmonic oscillator [J]. J Math Phys, 2007, 48: 032701.

[26] 张毅. 相空间中非完整非保守力学系统的一个动力学逆问题 [J]. 兵工学报, 2012, 33: 600.