

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2017.04.020

# 在量子信息分裂中利用局部测量提高量子参数估计

谢燕青, 严 凯, 黄雨梦, 郝 翔

(江苏省微纳热流技术与能源应用重复实验室, 苏州科技大学数理学院物理系, 苏州 215009)

**摘要:** 我们利用多体量子纠缠信道在环境噪声中实现了关于量子相位参量的信息分裂. 这个量子信息分裂方案是指从一个发送端, 人们将含有信息的任意量子态传输到多个接收端, 然后利用么正测量在任意一个接收端上还原量子参量信息. 我们发现, 在退振幅阻尼噪声通道下, 合理引入局部测量能提高量子参量估计精度. 当环境表现为马尔科夫性时, 经过量子信息分裂, 量子参量估计精度的动力学演化会呈现单调衰减趋势. 当环境具有一定记忆效应时, 其演化会呈现振荡起伏行为.

**关键词:** 局部测量; 量子 Fisher 信息量; 量子信息分裂; 多体量子纠缠; 量子退相干

**中图分类号:** O413.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2017)04-0785-06

## Improving quantum parameter estimation by partial measurements in quantum information splitting

XIE Yan-Qing, YAN Kai, HUANG Yu-Meng, HAO Xiang

(Jiangsu key Laboratory of micro and Nano Heat Fluid Flow Technology and Energy Application, School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

**Abstract:** We realize the quantum information splitting with respect to phase parameter through the quantum channel with multi-partite entangled states in the condition of the environmental noise. The protocol of quantum information splitting is that the information encoded in quantum parameters from a sender can be recovered at any one of many receivers by means of measurements. It is found that a general partial measurement can help to enhance the quantum Fisher information under the influence of amplitude-damping noise. In the Markovian case, the values of quantum Fisher information are decreased monotonically. In the non-Markovian case, there exists the oscillation of quantum Fisher information.

**Keywords:** Partial measurement; Quantum Fisher information; Quantum information splitting; Multi-partite entangled state; Quantum decoherence

## 1 引言

量子信息传输通常是指基于纠缠信道, 人们利用经典通信手段和局域测量, 实现量子态的远程重现<sup>[1-5]</sup>. 例如, 一个光子与一个纠缠对的光子

形成相互作用, 人们通过贝尔基测量, 可以将它传输到远方. 目前, 人们已经实现了量子隐形传态实验<sup>[1]</sup>. 近年来, 一些研究人员提出量子信息分裂<sup>[6-8]</sup>, 量子密钥分享<sup>[8]</sup>等方法, 尝试实现量子网络通信.

收稿日期: 2015-02-14

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(11274054); 江苏省研究生培养创新工程项目(JGLX15-150); 苏州科技大学研究生科研创新项目(SKYCX16-015)

作者简介: 谢燕青(1993-), 女, 硕士, 主要研究方向为量子光学与微结构光子学. E-mail: 18261433186@163.com

通讯作者: 郝翔. E-mail: xhao@phas.ubc.ca

如果我们将传输信息从整个态转换成某个携带信息的物理参数,如量子相位,那么通过量子参数估计精度就可以衡量<sup>[2]</sup>这种特定参数传输效率.在量子度量理论中,我们通常利用量子 Fisher 信息量(QFI)<sup>[10-12]</sup>,来定量评价量子参数估计精度.在实际情况下,一些外部测量或者环境噪声会导致量子信息传输效率的下降.为了解决环境造成的退相干<sup>[13-15]</sup>问题,人们发现利用局部弱测量<sup>[16, 17]</sup>可以保护纠缠信道.这种方法已经广泛地应用在量子信息领域<sup>[18-20]</sup>.

在一些以往的研究工作中,人们仅仅通过弱测量来抑制量子纠缠退相干<sup>[18, 20]</sup>,也讨论了在简单的马尔科夫环境中弱测量对量子隐形传态的影响<sup>[2]</sup>.然而,在更加复杂的实际环境中,人们非常关注量子通讯网络的实现和提高量子信息测量精度的方案.因此,我们有必要研究弱测量对实际噪声环境(如:具有记忆效应的非马尔科夫环境)中量子信息网络式传输效率的影响,分析在量子退相干过程中提高量子参数测量估计精度的可行性方案.本文利用局部测量算子及其逆操作来抚平噪声,定量地讨论量子参量在量子信息分裂前后的 QFI 变化,从而有效衡量量子参量估计精度和传输效率.我们考虑一种典型的量子比特,即与结构化环境耦合的两能级体系,其量子态包含量子相位参量信息.我们提出了一种网络式“量子信息分裂”的实验方案.其中,我们借助局部测量抑制退相干,分析了马尔科夫环境和非马尔科夫环境对 QFI 的影响.

## 2 量子 Fisher 信息和局域测量

在量子度量<sup>[21, 22]</sup>中,关于量子态携带信息的参数估计,人们可以利用量子 Fisher 信息量(QFI).它遵循量子克拉美罗方程,  $\text{var}(\hat{\varphi}) \geq 1/vF_\varphi$ , 其中,  $v$  为测量次数,  $F_\varphi$  为量子 Fisher 信息<sup>[21, 22]</sup>,

$$F_\varphi = \text{Tr}(\rho_\varphi L_\varphi^2) \quad (1)$$

$L_\varphi$  是对称对数导数(SLD)算子,  $L_\varphi$  满足  $\frac{\partial \rho_\varphi}{\partial \theta}$   $= \frac{\rho_\varphi L_\varphi + L_\varphi \rho_\varphi}{2}$ .

利用密度矩阵的谱分解  $\rho_\varphi = \sum_{i=1}^N p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ , 得到,  $L_\varphi = 2 \sum_{m,n} \frac{\langle\varphi_m | \partial_\varphi \rho_\varphi | \varphi_n\rangle}{p_m + p_n} |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|$ . 对于单量子比特,一般的量子态表示为  $\rho_\varphi = (I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})/2$ ,  $\vec{r}$  表

示 Bloch 矢量.  $\vec{\sigma} = (X, Y, Z)$  代表由三个泡利矩阵构成的矢量算符.那么,含有参量  $\varphi$  的 QFI 可由下式计算得到:

$$F_\varphi = \begin{cases} |\partial_\varphi \vec{r}|^2 + \frac{\vec{r} \cdot \partial_\varphi \vec{r}}{1 - |\vec{r}|^2}, & (|\vec{r}| < 1) \\ |\partial_\varphi \vec{r}|^2, & (|\vec{r}| = 1) \end{cases} \quad (2)$$

为了抑制量子退相干,我们引入了局部测量.根据局部测量定义<sup>[15, 16]</sup>,对于单量子比特,存在可逆的正定测量算子,  $M_m$ <sup>[16, 17]</sup>:

$$M_m = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1 - p_m} |1\rangle\langle 1| \quad (3)$$

参数  $0 \leq p_m \leq 1$  表示测量相对强度.局部测量算子  $M_m$  具有两点性质:(1)可调节的;(2)当  $p_m \neq 1$  时,可实现逆操作.

$$M_m^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(1 - p_m)}} X M_m X \quad (4)$$

此处,  $X$  是泡利矩阵  $X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ , 看作比特翻转.局部测量和它的逆操作可以在实验中通过构造一个么正矩阵来实现<sup>[16, 17, 20]</sup>.

## 3 局域噪声下的量子信息分裂

本文考虑一种典型的开放量子系统“自旋-玻色模型”:有效两能级系统与玻色场环境耦合系统<sup>[23, 24]</sup>.在网络式量子传输方案中,我们以此系统作为量子信息的载体.

单个量子系统与环境总的哈密顿量为:

$$H = H_A + H_R + H_I = H_0 + H_I \quad (5)$$

其中,量子系统 A 和玻色场环境 R 的哈密顿量写成  $H_0 = \omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k$ .  $\sigma_\pm$  表示系统的上升和下降算符,  $\omega_0$  表示能级跃迁频率,满足  $\sigma_+ |0\rangle_A = |1\rangle_A$ ,  $\sigma_- |1\rangle_A = |0\rangle_A$ .  $\omega_k$  为环境的模式场频率,  $b_j^\dagger$  和  $b_j$  分别为产生和湮灭算符.原子与环境之间相互作用的哈密顿量为:  $H_I = \sigma_+ \otimes R + \sigma_- \otimes R^\dagger$ ,  $R = \sum_k g_k b_k$ .  $g_k$  代表系统与模式场之间的耦合作用,在极限条件下,  $\sum_k |g_k|^2 \rightarrow \int_0^\infty J(\omega) d\omega$ . 其中,  $J(\omega)$  表示系统与环境相互作用的频谱密度函数,这里,我们采用洛伦兹频谱密度函数来描述:

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \Delta - \omega)^2 + \lambda^2} \quad (6)$$

其中,  $\lambda$  为光谱宽度;  $\gamma_0$  是系统和环境场的相互作用强度;  $\Delta$  代表模式场的中心频率与系统跃迁频率之间的失谐值.

根据已有的结论<sup>[23, 24]</sup>,在系统自身的 Hilbert

空间中, 系统的约化密度矩阵是:

$$\rho_A(t) = \begin{bmatrix} |c_1(t)|^2 & c_0^* c_1(t) \\ c_0 c_1^*(t) & 1 - |c_1(t)|^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中,  $c_1(t) = e^{-\frac{1}{2}(\lambda-i\Delta)t} [\cosh(\frac{dt}{2}) + \frac{\lambda-i\Delta}{d} \sinh(\frac{dt}{2})]$ . 这种退相干过程可以看成退振幅噪声信道<sup>[23, 24]</sup>, 可以采用 Kraus 算子来描述. 经过该通道的输出态可表示为:

$$\rho_A(t) = \epsilon^{AD} [\rho_A(0)] = E_0 \rho_A(0) E_0^\dagger + E_1 \rho_A(0) E_1^\dagger$$

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-r} \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

其中,  $r=1-|c_1(t)|^2$ ;  $P_t = |c_1(t)|^2$  表示为某一时刻的激发态占有数.

我们考虑的量子态信息分裂方案<sup>[8]</sup>是首先在发送方 Alice 与众多接收端 Bob<sub>1</sub>、Bob<sub>2</sub>、...、Bob<sub>N</sub>, 建立一种 N 体的非对称 W 纠缠态,

$$|W_A^{N+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |0\rangle_A \otimes |W_N\rangle + |1\rangle_A \otimes |0_N\rangle ] \quad (9)$$

此处 N 体 Bobs 处在 W 态:  $|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\dots 0\rangle_{B_1\dots B_N} + |01\dots 0\rangle_{B_1\dots B_N} + \dots + |00\dots 1\rangle_{B_1\dots B_N})$  或者处在定态  $|0_N\rangle = |00\dots 0\rangle_{B_1\dots B_N}$ .

在不失一般性的情况下, 我们可以考虑一种最简单的量子信息分裂过程, 即只有两个接收端 Bob<sub>1</sub> (B1)、Bob<sub>2</sub> (B2). 当 Alice 和 Bob<sub>1</sub>、Bob<sub>2</sub> 处于公式(9)描述的多体纠缠态时, Bob<sub>1</sub>、Bob<sub>2</sub> 就处于 W 态  $|W_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_{B_1B_2} + |01\rangle_{B_1B_2})$ , 或者  $|0_2\rangle = |00\rangle_{B_1B_2}$ .

首先, 输入态  $\rho_m = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ ,  $|\psi_0\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  和系统 A 上进行 Bell 测量. 以这种方式, 量子信息可以在 Alice 和 Bobs 共享的信道上进行编码. 为了在选定的输出系统 B1 或 B2 上恢复量子态, 需要一种么正操作 U, 使其满足  $U|W_2\rangle = |10\rangle_{B_1B_2}$  或  $U|W_2\rangle = |01\rangle_{B_1B_2}$ .  $\hat{U}|0_2\rangle = |00\rangle_{B_1B_2}$ . 最后, 通过经典通信得到 Bell 测量结果后, 我们施加相应单比特旋转操作 R, 就可以将信息传输到接收方 B1 或者 B2 上. 与单量子态隐形传输方案相比较, 利用这个多体纠缠传输信道, 人们可以在任意一个接收

端上重现量子态, 所以此方案称作量子信息分裂<sup>[6, 7]</sup>.

整个方案如图(1)所示. 这里, 四种 Bell 基测量包含  $|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ ,  $|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |10\rangle)$ , 相应的旋转操作 R 与 Bell 测量一一对应, 分别为:  $R(\Phi_+) = \sigma_x$ ;  $R(\Phi_-) = \sigma_y$ ;  $R(\Psi_+) = I$ ;  $R(\Psi_-) = \sigma_z$ .

如果施加这样的么正操作:

$$U_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \mp \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

就可以在 B1(采用  $U_+$ ) 或 B2(采用  $U_-$ ) 上重现量子态.

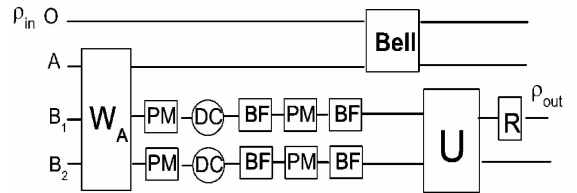


图 1 在退振幅噪声通道中, 量子信息分裂方案初始系统 O、A 由发送方 Alice 控制, B1、B2 表示 Bob 的两个接收端. Alice 和 Bob 两个接收端 (B1、B2) 共享一个非对称 Werner 纠缠态  $W_A$ . 为抑制局域噪声, B1、B2 对这个各自态进行局部测量以及逆操作. 然后, Alice 将进行 Bell 测量的结果传给 Bob, Bob 通过么正操作 U 和相应旋转操作来实现量子信息分裂. PM 代表局部测量, BF 代表比特翻转, DC 代表退振幅阻尼噪声.

Fig. 1 The schematic diagram of quantum network-transmission in the amplitude damping noise. The initial states for the systems O and A are controlled by Alice. B1, B2 represent the receivers of Bobs. The Werner-like state  $|W^{N+1}A\rangle$  is set up between Alice and Bobs. Bobs take the partial measurements and their reversals to suppress quantum decoherence. Then, After Alice sends the results of Bell measurements to Bob, the quantum information splitting will be realized by the local unitary operations  $U_{\pm}$  and rotating operators R. Here, PM denotes partial measurement. BF represents the bit-flip operation. DC labels the decoherence channel in the amplitude damping noise.

### 4 数值分析

假设通道中存在局域噪声如公式(8)所描述的退振幅阻尼, 我们利用局部测量及其逆操作可以有效抑制退相干的影响. 首先, B1 和 B2 分别对各自态进行一次局部测量得到相应的密度算子  $M_m$

$\rho M_m^\dagger$ . 在退振幅噪声影响下,再次对他进行一次逆操作测量  $M_m^{-1}\epsilon^{AD}(M_m\rho M_m^\dagger)(M_m^{-1})^\dagger$ . 经过 Bell 基测量后,我们可以得出一个输出态:

$$\rho_{B1B2} = \frac{1}{Q} [\cos^2(\theta/2) \cdot G + \frac{1}{2}\sqrt{1-r}\sin(\theta)e^{i\varphi} |O_2\rangle\langle W_2| + \frac{1}{2}\sqrt{1-r}\sin(\theta)e^{-i\varphi} |W_2\rangle\langle O_2| + \sin^2(\theta/2) |O_2\rangle\langle O_2| ] \quad (11)$$

此处,  $G=(1-r)|W_2\rangle\langle W_2| + r(1-p_m)|O_2\rangle\langle O_2|$ ,  $Q=\cos^2(\theta/2) \cdot G + \sin^2(\theta/2)$ ,  $|O_2\rangle=|100\rangle$ .

最后,在接收端系统上先施加么正变换  $U_\pm$ , 再在 B1(或 B2)上完成相应旋转操作 R,我们就可以在 B1(或 B2)上得到包含参数测量信息的输出态:

$$\rho_{out}(\varphi) = \frac{1}{Q_1} \begin{bmatrix} (1-r)\cos^2\frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{1-r}\sin\theta e^{-i\varphi} \\ \frac{1}{2}\sqrt{1-r}\sin\theta e^{i\varphi} & \sin^2\frac{\theta}{2} + r\cos^2\frac{\theta}{2}(1-p_m) \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中,  $Q_1=1-rp_m\cos^2(\theta/2)$  为归一化系数. 如果没有引入局部测量 ( $p_m=0$ ), 此时的输出态与量子隐形传态<sup>[1]</sup>结果一致. 通过量子 Fisher 信息量的计算方法,即公式(2),我们得到关于参数信息  $\varphi$  的

QFI:

$$F_\varphi = \frac{(1-r)\sin^2\theta}{Q_1^2} \quad (13)$$

如果在量子信息分裂方案中不介入局部测量,那么在退振幅阻尼噪声的影响下,我们得到关于参数信息  $\varphi$  的 QFI 为  $F_{\varphi 0}=(1-r)\sin^2\theta$ . 根据公式(13),当测量强度  $p_m \rightarrow 1$  时, QFI 可以获得理论上的极限值:  $F_\varphi \rightarrow F_\varphi^{\text{lim}} = \frac{(1-r)\sin^2\theta}{(1-r\cos^2\frac{\theta}{2})^2}$ . 在这个理想情形下,测量退化为投影测量,它是局部测量的极限情形. 进一步分析可得,当满足  $0 < 1-rp_m\cos^2(\theta/2) < 1$  时,  $F_\varphi > F_{\varphi 0}$ . 当我们将两体情形推广至多体量子网络时,从任一个输出方输出. 我们可以得到输出态与公式(12)一致,相应的 QFI 也与公式(13)一致.

在马尔科夫环境下,图 2(a)表明随着演化时间的变化, QFI 呈现平滑衰减趋势. 此时的环境性质可由自旋极化率  $P_i=[\sigma_z]=Tr(\rho_i\sigma_z)$  描述. 我们画出它随着时间变化的曲线图,如图 2(b). 我们可以发现 QFI 的变化趋势与  $P_i$  很相似. 这说明环境特性对量子信息分裂的影响较大. 当  $p_m$  增大时, QFI 值也会有所提高. 这表明局域测量确实对保护网络式量子信息分裂有着较好的作用.

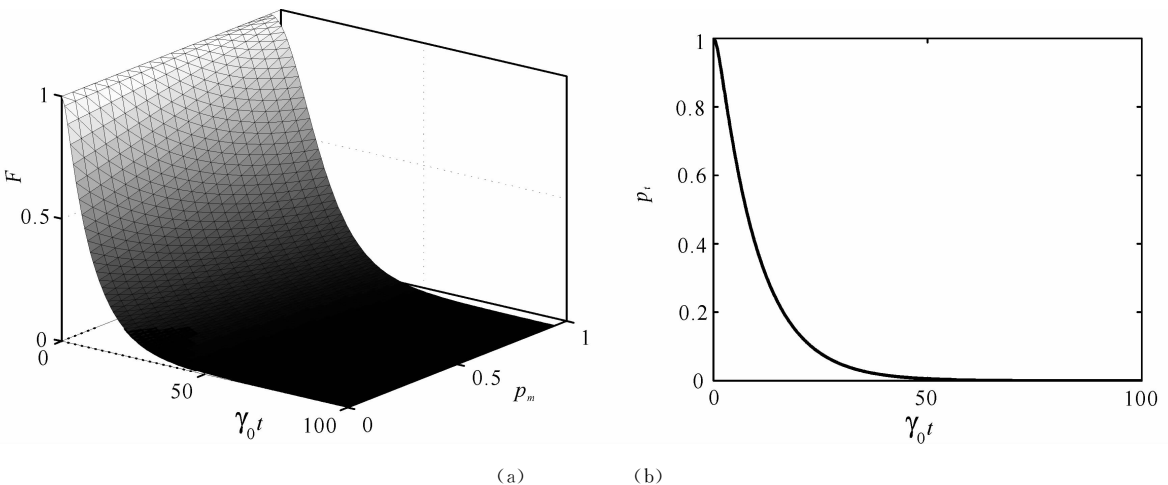


图 2 马尔科夫环境中局部测量对量子参量传输效率的影响

(a) QFI 随演化时间以及测量强度的动力学演化. 初态  $\theta = 0.5\pi$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\gamma_0 = 0.1\lambda$ ; (b) 自旋极化率  $[\sigma_z]$  的动力学演化.

Fig. 2 The effects of the partial measurements on the transmission efficiency of quantum parameter in the Markovian environment.

(a) The dynamical evolution of QFI as a function of the strength of partial measurement and evolution time; (b) The dynamical evolution of spin polarization  $[\sigma_z]$ . Here,  $\theta = 0.5\pi$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\gamma_0 = 0.1\lambda$ .

同理在非马尔科夫环境下,局部测量引起 QFI 的增益也呈现出一种振荡起伏的动力学行为,如图 3(a)所示. 它的振荡行为与系统的自旋极化率有关,如图 3(b).

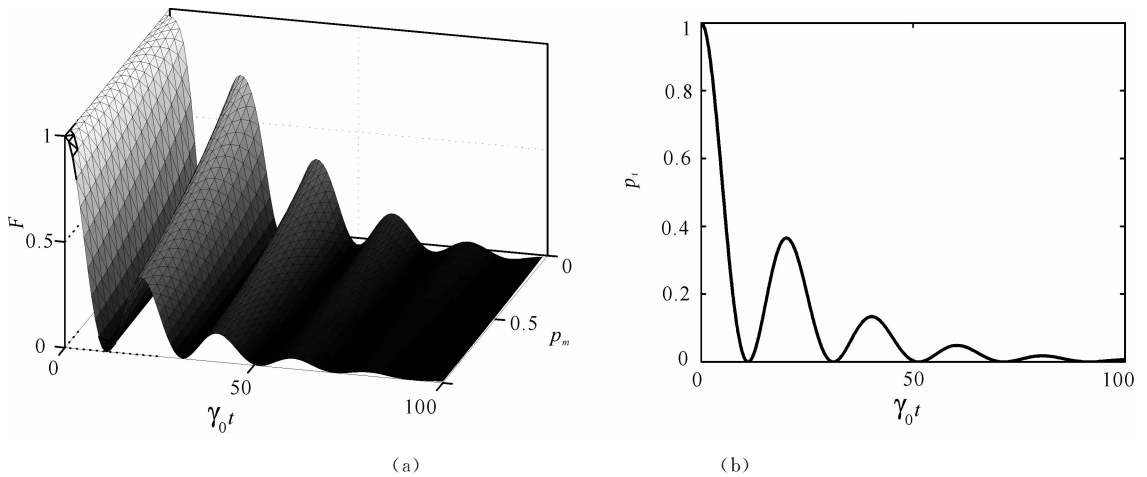


图 3 非马尔科夫环境中局部测量对量子参量传输效率的影响.

(a) QFI 随演化时间以及测量强度的动力学演化. 初态  $\theta = 0.5\pi$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $\gamma_0 = 20\lambda$ . (b) 自旋极化率  $[\sigma_z]$  的动力学演化.

Fig. 3 The effects of the partial measurement on the transmission efficiency of quantum parameter in the non-Markovian environment

(a) The dynamical evolution of QFI as a function of the strength of partial measurement and evolution time. (b) The dynamical evolution of spin polarization  $[\sigma_z]$ . Here,  $\theta = 0.5\pi$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\gamma_0 = 0.1\lambda$ .

我们发现在局部测量作用下, 量子参量的信息分裂效率与环境特性紧密相关.

## 5 结 论

在本文中, 我们通过一种多体量子纠缠信道实现了关于量子相位参量的信息分裂, 在退振幅阻尼噪声下, 主要研究了局域测量对 QFI 的影响. 我们考虑一种典型的自旋-玻色模型, 在数值计算中, 选取 Lorentzian 频谱密度函数来描述原子与环境的耦合. 当系统经过量子信息分裂后, 我们发现调节局部测量的强度  $p_m \rightarrow 1$ , 能在接收端上获得最优化的 QFI. 当满足  $0 < 1 - rp_m \cos^2(\theta/2) < 1$  条件时, 我们所得的 QFI 是恒大于不加局部测量的 QFI. 这个结果表明, 局部测量可以有效抑制量子退相干对量子信息分裂的影响. 输出态 QFI 的动力学演化行为与开放系统的自旋极化率的动力学行为相似. 这个现象说明量子参量的信息分裂效率与环境特性联系紧密.

## 参考文献:

- [1] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, *et al.* Experimental quantum teleportation [J]. Nature, 1997, 390: 575.
- [2] Xing X, Yao Y, Zhong W J, *et al.* Enhancing teleportation of quantum Fisher information by partial measurements [J]. Phys Rev A, 2016, 93: 012307.
- [3] Furusawa A, Sorensen J L, Braunstein S L, *et al.* Unconditional quantum teleportation [J]. Science, 1998, 282: 706.
- [4] Siomau M, Fritzsche S. Evolution equation for entanglement of multi qubit systems [J]. Phys Rev A, 2010, 82: 062327.
- [5] 薛丽, 任一鸣, 姜年权. 基于腔 QED 中实现多种量子克隆 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 115.
- [6] Gao Y X, Zhou H, Zou D, *et al.* Preparation of Greenberger-Horne-Zeilinger and W states on a one-dimensional Ising chain by global control [J]. Phys Rev A, 2013, 87: 032335.
- [7] Liu S P, Yu R, Li J H, *et al.* Generation of a multi-qubit W entangled state through spatially separated semiconductor quantum-dot-molecules in cavity-quantum electrodynamics arrays [J]. J Appl Phys, 2014, 115: 134312.
- [8] Dai Y, Zhao B X, Hao X, *et al.* Quantum network teleportation with controllable quantum gates in the channel of asymmetric multipartite entangled states [J]. J Quantum Opt, 2016, 22: 341.
- [9] Hillery M, Bužek V, Berthiaume A. Quantum secret sharing [J]. Phys Rev A, 1999, 59: 1829.
- [10] Liu J, Jing X X, Zhong W, Wang X G. Quantum Fisher information for density matrices with arbitrary ranks [J]. Commun Theor Phys, 2014, 61: 45.
- [11] 钟伟, 王晓光. 量子度量学以及量子 Fisher 信息的研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2014.

- [12] Petz D, Ghinea C. Introduction to quantum Fisher information [M]. Singapore: World Scientific, 2011: 261.
- [13] Weiss U. Quantum dissipative systems [M]. Singapore: World Scientific, 1999.
- [14] Gardiner C W, Zoller P. Quantum Noise [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [15] Anandan J, Aharonov Y. Geometry of quantum evolution [J]. Phys Rev Lett, 1990, 65: 1697.
- [16] Paraoanu G S. Generalized partial measurements [J]. EPL, 2011, 93: 64002.
- [17] Paraoanu G S. Extraction of information from a single quantum [J]. Phys Rev A, 2011, 83: 044101.
- [18] Kim Y S, Lee J C, Kwon O, Kim Y H. Protecting entanglement from decoherence using weak measurement and quantum measurement reversal [J]. Nature Phys, 2012, 8: 117.
- [19] Korotkov A N, Jordan A N. Undoing a weak quantum measurement of a solid-state qubit [J]. Phys Rev Lett, 2006, 97: 166805.
- [20] Wang S C, Yu Z W. Protecting quantum states from decoherence of finite temperature using weak measurement [J]. Phys Rev A, 2014, 89: 022318.
- [21] C W Helstrom. Quantum detection and estimation theory [J]. J Statist Phys, 1969, 1: 231.
- [22] 李承祖. 量子通信和量子计算 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2000.
- [23] Breuer H P, Petruccione F. The theory of open quantum system [M]. New York: Oxford University Press, 2002.
- [24] Breuer H P. Colloquium: Non-Markovian dynamics in open quantum systems [J]. Rev Mod Phys, 2016, 88: 021002.