2019 年 1 月　　四川大学学报(自然科学版)　　Jan. 2019
第 56 卷　第 1 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 56　No. 1

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.01.016

三维有挠率引力中的守恒荷

魏诚浩，宁　波
(四川大学物理科学与技术学院，成都 610064)

摘　要：由于引力场的微分同胚不变性，定义能量一直是引力理论中的难题，人们为此发展了一系列方法. 本文将 Wald 基于拉格朗日形式体系构造引力场的准局域能量的方法推广到三维有挠率引力的情形，给出了 Mielke-Baekler (MB) 模型中的守恒的能量与角动量，并计算了有挠率的 BTZ 黑洞解的守恒荷. 所得结果与基于哈密顿形式体系的方法给出的守恒荷相一致.

关键词：准局域能量；Mielke-Baekler 模型；挠率；引力

中图分类号：O412.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)01-0087-04

Conserved charge in three-dimensional gravity with torsion

WEI Cheng-Hao, *NING Bo*
(College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: The definition of energy is a long-standing difficult problem in gravity theory because of the diffeomorphism invariance of the gravity field. Various approaches have been developed. We have generalized Wald's approach for the constructing quasi-local energy of gravity field, which is based on the Lagrangian formulation, to the three-dimensional gravity with torsion, and obtained the conserved energy and angular momentum for the Mielke-Baekler (MB) model. For BTZ black hole with torsion, the conserved charges are consistent with those obtained from the approach based on Hamiltonian formulation.

Keywords: Quasi-local energy; Mielke-Baekler model; Torsion; Gravity

1　引　言

在广义相对论中定义引力场的能量是一个微妙的问题. 由于引力场具有微分同胚不变性，任何一点的度规都可以通过坐标变换变为平坦的，这意味着该点处引力的“能量密度”总可以为坐标变换所消除. 换句话说，在广义相对论中不可能定义引力场在某一点处的能量密度，只能定义一定时空范围内的准局域能量(quasi-local energy).

自 Einstein 以来，人们发展了一系列方法构造引力场的准局域能量. 一种被广泛使用的方法是 Nester 等人基于哈密顿形式体系构造的[1]，通过减除作为基准的背景时空并考虑适当的边界项，可以由有限区域的引力场哈密顿量构造准局域能量. 另一种方法由 Wald 及其合作者基于拉格朗日形式体系所构造[2,3]，将准局域能量定义为与守恒的 Noether 荷相联系的辛形式(symplectic form)，并指出黑洞熵即为视界上的 Noether 荷.

作为探索可能的量子引力的简单模型，三维 Einstein 引力没有局域的自由度，然而仍具有足够有趣的黑洞解——BTZ 黑洞[4,5]. 对 BTZ 黑洞的熵以及渐近对称性的讨论为揭示三维量子引力与

收稿日期：2017-05-21
基金项目：国家自然科学基金青年基金(11505119)
作者简介：魏诚浩(1991－)，男，四川成都人，硕士，主要研究领域为引力/场论对偶.
通讯作者：宁波. E-mail：ningbo@scu.edu.cn

二维共形场论的对偶提供了有力证据[6]. 另一方面,作为对经典 Einstein 引力的修正,挠率在考虑引力场与费米子的耦合时自然出现[7],且具有挠率的 Einstein-Cartan 引力被证明等价于 Poincaré 规范理论[8]. 一个有挠率的三维引力理论由 Mielke 与 Baekler 提出[9,10],该理论亦具有类似 BTZ 黑洞形式的解[11].

本文将 Wald 构造时空准局域能量的方法推广到 Mielke-Baekler(MB) 模型,给出守恒的能量与角动量的定义,并计算了有挠率的 BTZ 黑洞解的守恒荷. 所得结果与基于哈密顿形式体系方法得到的能量与角动量[11]结果相一致.

2 准局域能量及守恒荷

Wald 及其合作者于九十年代提出了基于拉格朗日体系的准局域能量的定义[2,3]. 相应于渐近的时间平移及空间旋转 Killing 矢量的全时空准局域能量分别给出守恒的能量与角动量. 对于 Einstein 引力中的四维渐近平坦时空,此定义即回到 ADM 质量及 Komar 角动量. 特别地,黑洞熵即为相应于在分叉(bifurcate) Killing 视界上取零值的 Killing 矢量的 Noether 荷在视界上的积分. 由此定义的黑洞熵与能量及角动量满足黑洞的热力学第一定律.

对于一般的拉格朗日 n-形式(n 为时空维数) L,其变分包含运动方程项及一个表面项:

$$\delta L=E\delta\varphi+d\Theta(\varphi,\delta\varphi), \tag{1}$$

其中 φ 表示所有可能的动力学场(包括引力场与物质场), Θ 为辛势(symplectic potential) $(n-1)$-形式,运动方程即为 $E=0$. 辛流(symplectic current) $(n-1)$-形式定义为

$$\omega(\varphi,\delta_1\varphi,\delta_2\varphi)=\delta_2\Theta(\varphi,\delta_1\varphi)-\delta_1\Theta(\varphi,\delta_2\varphi). \tag{2}$$

令 C 为一 Cauchy 面,定义相对于 C 的辛形式(symplectic form) 为

$$\Omega(\varphi,\delta_1\varphi,\delta_2\varphi)=\int_C\omega(\varphi,\delta_1\varphi,\delta_2\varphi). \tag{3}$$

令 ξ_a 为时空中流形上的光滑矢量场,与 ξ_a 相联系的 Noether 流 $(n-1)$-形式定义为

$$J=\Theta(\varphi,L_\xi\varphi)-\xi\cdot L, \tag{4}$$

可以证明[2],当 φ 满足运动方程时 J 为闭形式 $dJ\approx 0$($\approx$表示"在壳"即 $E=0$ 时相等),则有

$$J\approx dQ, \tag{5}$$

Q 即为 Noether 荷 $(n-2)$-形式. 对任意矢量场 ξ_a 可验证

$$\omega(\varphi,\delta\varphi,L_\xi\varphi)\approx\delta J-d(\xi\cdot\Theta). \tag{6}$$

考虑渐近平坦时空且 Cauchy 面 C 只有一个渐近无穷远边界的情形. 将 ξ_a 视为"时间演化"矢量场,其相应的哈密顿运动方程可由辛形式表示为

$$\delta H=\Omega(\varphi,\delta\varphi,L_\xi\varphi), \tag{7}$$

其中, H 为相应于ξ_a 的哈密顿量,则由(6)

$$\delta H=\delta\int_C J-\int_\infty\xi\cdot\Theta, \tag{8}$$

当且仅当存在$(n-1)$-形式 B 使得

$$\delta\int_\infty\xi\cdot B=\int_\infty\xi\cdot\Theta \tag{9}$$

成立时,哈密顿量 H 存在且为

$$H=\int_\infty(Q-\xi\cdot B). \tag{10}$$

若 Γ 为 Cauchy 面 C 上一微分同胚不变子空间,则可定义相应于 Γ 的哈密顿量

$$H_\Gamma=\int_{\partial\Gamma}(Q-\xi\cdot B), \tag{11}$$

H_Γ 即为子空间 Γ 上的准局域能量.

取 ξ_a 分别为渐近时间平移及空间旋转矢量场 t_a 及 φ_a 且假设 B 存在,可定义相应的全时空准局域能量分别为正则能量 E 及正则角动量 J:

$$E=\int_\infty(Q[t]-t\cdot B), \tag{12}$$

$$J=-\int_\infty Q[\varphi], \tag{13}$$

(13)中, $\varphi\cdot B$ 项消失是由于总可以选取无穷远边界面处处与 φa 相切,此时 $\varphi\cdot B$ 项拉回(pullback)到该边界面上值为零;引入额外的负号是由于在 Lorentz 标记(signature) 时空,能量与角动量的定义相差一个负号. 可验证对于 Einstein 引力中的四维渐近平坦时空, E 及 J 即为 ADM 质量及 Komar 角动量.

当 ξ_a 为时空的 Killing 矢量且 $\delta\varphi$ 满足线性化的运动方程时,(6)式左边为零,因此当 φ 满足运动方程时有

$$d(\delta Q-\xi\cdot\Theta)=0, \tag{14}$$

将(14)在一超曲面 Ξ 上积分,可得

$$\int_{\partial\Xi}\delta Q[\xi]-\xi\cdot\Theta=0. \tag{15}$$

考虑具有分叉 Killing 视界的稳态黑洞,令 ξ_a 为在分叉$(n-2)$-维视界面 Σ 上为零的 Killing 场

$$\xi_a=t_a+\Omega_H\varphi_a, \tag{16}$$

其中 Ω_H 为视界角速度. 假设 Ξ 为渐近平坦超曲面且只有 Σ 作为其内部边界,由(15)(16)及(12)(13)可得

$$\delta\int_{\Sigma} Q[\xi]=\delta E-\Omega_H\delta J\,,\tag{17}$$

定义黑洞熵为 Noether 荷在分叉$(n-2)$-维视界面Σ上的积分

$$S=2\pi\int_{\Sigma}\widetilde{Q}[\xi],\tag{18}$$

其中,$\widetilde{Q}[\xi]=Q[\kappa\xi]$($\kappa$ 为黑洞的表面引力),可知$\delta Q=\kappa\delta\widetilde{Q}$,由(17)有

$$\frac{\kappa}{2\pi}\delta S=\delta E-\Omega_H\delta J\,,\tag{19}$$

即为黑洞的热力学第一定律.

3　MB 模型及有挠率的 BTZ 黑洞解

Mielke-Baekler 模型的拉格朗日量为(不考虑物质部分)[9,10]:

$$L_{MB}=-\frac{\chi}{2l}R^{\alpha\beta}\wedge\eta_{\alpha\beta}-\frac{\Lambda}{l}\eta+\frac{\theta_T}{2l^2}\theta\alpha\wedge T^{\alpha}-\frac{\theta_L}{2}(\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge d\omega^{\alpha}_{\beta}-\frac{2}{3}\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma}),\tag{20}$$

其中,第一项为 Einstein-Cartan 项,常数 χ 取值为 0 或 1;第二项为宇宙学常数项;第三项与第四项为挠率及曲率的 Chern-Simons 项,分别乘以常数 θ_T 及 θ_L; l 为三维引力耦合常数. $\theta\alpha$ 为标架场 1-形式 $\theta\alpha=e_{i}\alpha dx^{i}$,记 $\theta\alpha_{\beta}\cdots:=\theta\alpha\wedge\theta_{\beta}\wedge\cdots$,$\eta$一基定义为 $\eta:=*1,\eta_{\alpha}:=*\theta_{\alpha},\eta_{\alpha\beta}:=*\theta_{\alpha\beta},\eta_{\alpha\beta\gamma}:=*\theta_{\alpha\beta\gamma}$($*$表示 Hodge 对偶[12]). $\omega_{\alpha\beta}$为自旋联络 1-形式 $\omega_{\alpha\beta}=\omega_{i\alpha\beta}dx^{i}$, $T\alpha$ 与 $R\alpha_{\beta}$ 分别为挠率及曲率 2-形式

$$T\alpha:=\mathrm{d}\theta\alpha+\omega_{\beta\alpha}\wedge\theta^{\beta},R_{\alpha\beta}:=\mathrm{d}\omega_{\alpha\beta}-\omega^{\gamma}_{\alpha}\wedge\omega_{\gamma\beta}\tag{21}$$

(希腊字母 $\alpha,\beta,\cdots=\hat{0},\hat{1},\hat{2}$表示标架指标,拉丁字母 $i,j,\cdots=0,1,2$ 表示坐标指标).

采用一阶形式体系(first-order formulation)观点,将标架场 $\theta\alpha$ 及自旋联络 $\omega_{\alpha\beta}$视为独立的动力学场. 将(20) 对 $\theta\alpha$ 及 $\omega_{\alpha\beta}$变分可得运动方程:

$$(E_{\theta})_{\alpha}=-\frac{\chi}{2l}\eta_{\alpha\beta\gamma}\wedge R^{\beta\gamma}-\frac{\Lambda}{l}\eta_{\alpha}+\frac{\theta_T}{l^2}T_{\alpha}=0,$$

$$(E_{\omega})_{\alpha\beta}=-\frac{\chi}{2l}\eta_{\alpha\beta\gamma}\wedge T_{\gamma}+\frac{\theta_T}{2l^2}\theta_{\alpha\beta}+\theta_L R_{\alpha\beta}=0\tag{22}$$

该方程有如下类似 BTZ 形式的精确解[11]:

$$\theta_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{t}}=\psi(r)dt,\theta_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{r}}=\frac{dr}{\psi(r)},$$

$$\theta_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{\varphi}}=r\Big(-\frac{J}{2r^2}dt+d\varphi\Big),\tag{23}$$

$$\omega_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{t}\hat{r}}=-\omega_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{r}\hat{t}}=\Big(\frac{T}{l}\frac{J}{2r}-\Lambda_{eff}r\Big)dt+\Big(\frac{J}{2r}-\frac{T}{l}r\Big)d\varphi,$$

$$\omega_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{r}\hat{\varphi}}=-\omega_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{\varphi}\hat{r}}=\psi(r)\Big(\frac{T}{l}dt+d\varphi\Big),$$

$$\omega_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{\varphi}\hat{t}}=-\omega_{\mathrm{BTZ}}{}^{\hat{t}\hat{\varphi}}=-\Big(\frac{J}{2r^2}+\frac{T}{l}\Big)\frac{dr}{\psi(r)},\tag{24}$$

其中, $-\infty<t<+\infty,0<r<+\infty,0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$,且

$$\psi(r):=\sqrt{\Big(\frac{J}{2r}\Big)^2-M+\Lambda_{eff}r^2}\,,\tag{25}$$

$$T:=\frac{-\frac{\theta_T}{2}\chi+\Lambda l^2\theta_L}{\chi^2+2\theta_T\theta_L},$$

$$\Lambda_{eff}:=\frac{T^2+R}{l^2},$$

$$R:=-\frac{\theta_T^2+\chi\Lambda l^2}{\chi^2+2\theta_T\theta_L}.\tag{26}$$

采用基于哈密顿体系构造的准局域能量[1],且假定 Einstein-Cartan 项存在($\chi=1$)时,求得的上述有挠率的 BTZ 黑洞的守恒能量与角动量为[11]:

$$E_{\infty}=M-2\theta_L(TM-\Lambda_{eff}lJ),\tag{27}$$

$$L_{\infty}=J+2\theta_L(lM-TJ).\tag{28}$$

4　MB 模型的守恒荷

我们将 Wald 的方法推广到渐近 AdS 时空且有挠率的情形,考虑 MB 模型的准局域能量. 将拉格朗日量(20)对独立的动力学场 $\theta\alpha$ 及 $\omega_{\alpha\beta}$变分,可得

$$\delta L_{\mathrm{MB}}=(E_{\theta})_{\alpha}\wedge\delta\theta\alpha+(E_{\omega})_{\alpha\beta}\wedge\delta\omega_{\alpha\beta}+d\Theta_{\mathrm{MB}}\tag{29}$$

$(E_{\theta})_{\alpha}=0,(E_{\omega})_{\alpha\beta}=0$ 即为运动方程(22),辛势

$$\Theta_{\mathrm{MB}}=\frac{\chi}{2l}\eta_{\alpha\beta}\wedge\delta\omega^{\alpha\beta}-\frac{\theta_T}{2l^2}\theta_{\alpha}\wedge\delta\theta^{\alpha}-\frac{\theta_L}{2}\omega_{\alpha\beta}\wedge\delta\omega^{\alpha\beta}.\tag{30}$$

对任意光滑矢量场 ξ_{a},取(30)中 $\delta\theta\alpha=L_{\xi}\theta\alpha,\delta\omega_{\alpha\beta}=L_{\xi}\omega_{\alpha\beta}$,利用等式

$$L_{\xi}A=\xi\cdot dA+d(\xi\cdot A)\tag{31}$$

(其中 A 为任意 1-形式)可由(4)求得 Noether 流 $J_{\mathrm{MB}}\approx dQ_{\mathrm{MB}}$,其中, Noether 荷

$$Q_{\mathrm{MB}}=-\frac{\chi}{2l}(\xi\cdot\omega^{\alpha\beta})\wedge\eta_{\alpha\beta}+\frac{\theta_T}{2l^2}(\xi\cdot\theta^{\alpha})\wedge\theta_{\alpha}+\frac{\theta_L}{2}(\xi\cdot\omega^{\alpha\beta})\wedge\omega_{\alpha\beta}.\tag{32}$$

当 $\delta\theta\alpha,\delta\omega_{\alpha\beta}$亦满足运动方程时,有 $\delta J_{\mathrm{MB}}=\delta dQ_{\mathrm{MB}}=d\delta Q_{\mathrm{MB}}$. 由(8)有

$$\delta H_{\mathrm{MB}}[\xi]=\int_{\infty}\delta Q_{\mathrm{MB}}[\xi]-\xi\cdot\Theta_{\mathrm{MB}},\tag{33}$$

将(30)(32)代入得

$$\delta H_{\mathrm{MB}}[\xi]=\int_{\infty}\{-\frac{\chi}{2l}[(\xi\cdot\omega_{\alpha\beta})\wedge\delta\eta_{\alpha\beta}+$$

$$(\xi\cdot\eta_{\alpha\beta})\wedge\delta\omega_{\alpha\beta}]+\frac{\theta_T}{l^2}(\xi\cdot\theta\alpha)\wedge\delta\theta^{\alpha}+$$

$$\theta_L(\xi\cdot\omega^{\alpha\beta})\wedge\delta\omega_{\alpha\beta}\},\tag{34}$$

这里,δ 的涵义为两个“在壳”解的差值. 渐近 AdS 解可以看作 AdS 上的微扰,将 AdS 视为真空,则 δH_{MB}即为渐近 AdS 解的准局域能量.

考虑有挠率的 BTZ 黑洞解(23~26). 当 $M=J=0$ 时该解回到 AdS 真空

$$\theta_0{}^{\hat{t}}=\sqrt{\Lambda_{\mathrm{eff}}}\,rdt,\ \theta_0{}^{\hat{r}}=\frac{dr}{\sqrt{\Lambda_{\mathrm{eff}}}\,r},\ \theta_0{}^{\hat{\varphi}}=rd\varphi,\tag{35}$$

$$\omega_0{}^{\hat{t}\hat{r}}=-\omega_0{}^{\hat{r}\hat{t}}=-\Lambda_{\mathrm{eff}}rdt-\frac{T}{l}rd\varphi,$$

$$\omega_0{}^{\hat{t}\hat{r}}=-\omega_0{}^{\hat{r}\hat{t}}=-\Lambda_{\mathrm{eff}}rdt-\frac{T}{l}rd\varphi.\tag{36}$$

为计算守恒荷,取 Cauchy 面为类空超曲面 $t=$常数,则其无穷远边界满足 $dt=0$,$r\to\infty$. 将 $\delta\theta\alpha=\theta_{\mathrm{BTZ}}\alpha-\theta_0\alpha$,$\delta\omega_{\alpha\beta}=\omega_{\mathrm{BTZ}\alpha\beta}-\omega_{0\alpha\beta}$代入(34),取 ξ 分别为∂_t 及∂_{φ} 并在无穷远边界上对 φ 积分,可得守恒的能量与角动量

$$E=\delta H_{\mathrm{MB}}[\partial_t]=M-2\theta_L(TM-\Lambda_{eff}lJ),\tag{37}$$

$$J=-\delta H_{\mathrm{MB}}[\partial_{\varphi}]=J+2\theta_L(lM-TJ),\tag{38}$$

(上两式中已假定 $\chi=1$,依照解的约定取引力常数 $l=\pi$[11],且对角动量引入因子-1). 可见(37)(38)与基于哈密顿形式体系求得的守恒荷(27)(28)相一致.

5 结 论

本文将 Wald 及其合作者基于拉格朗日体系构造准局域能量的方法推广到有挠率的三维引力理论 Mielke-Baekler 模型,得到渐近 AdS 解的准局域能量(34),利用其求出有挠率的 BTZ 黑洞解的守恒能量与角动量. 所得结果与 Nester 等人基于哈密顿形式体系构造准局域能量的方法得到的守恒荷相一致.

构造准局域能量的各种方法并不具有天然的等价性,尤其是将其推广到不同于 Einstein 引力的其他引力理论的各种时空解时. 本文的结果支持 Wald 方法与 Nester 方法在有挠率的三维引力中是等价的. 从形式体系本身探讨或证明这种等价性,将是对更深入地认识有挠率的引力十分有意义的课题.

参考文献:

[1] Chen C M, Nester J M. Quasilocal quantities for GR and other gravity theories [J]. Classical Quant Grav, 1999, 16: 1279.

[2] Wald R M. Black hole entropy is the Noether charge [J]. Phys Rev D, 1993, 48: R3427.

[3] Iyer V, Wald R M. Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy [J]. Phys Rev D, 1994, 50: 846.

[4] Banados M, Teitelboim C, Zanelli J. Black hole in three-dimensional spacetime [J]. Phys Rev Lett, 1992, 69: 1849.

[5] Badados M, Henneaux M, Teitelboim C, *et al*. Geometry of the 2+1 black hole [J]. Phys Rev D, 1993, 48: 1506.

[6] Strominger A. Black hole entropy from near horizon microstates [J]. J High Energy Phys, 1998, 02: 009.

[7] Freedman D Z, Proeyen A V. Supergravity [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[8] Hehl F W, Von der Heyde P, Kerlick G D, *et al*. General relativity with spin and torsion: foundations and prospects [J]. Rev Mod Phys, 1976, 48: 393.

[9] Mielke E W, Baekler P. Topological gauge model of gravity with torsion [J]. Phys Lett A, 1991, 156: 399.

[10] Baekler P, Mielke E W, Hehl F W. Dynamical symmetries in topological 3D gravity with torsion [J]. Nuovo Cim B, 1992, 107: 91.

[11] Garcia A A, Hehl F W, Heinicke C, *et al*. Exact vacuum solution of a (1+2)-dimensional Poincare gauge theory: BTZ solution with torsion [J]. Phys Rev , 2003, 67: 124016.

[12] 连朝. 局部和整体共形 balanced 流形的关系 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52: 251.

引用本文格式:

中 文: 魏诚浩, 宁波. 三维有挠率引力中的守恒荷 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 87.

英 文: Wei C H, Ning B. Conserved charge in three-dimensional gravity with torsion [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 87.