2018 年 11 月 四川大学学报(自然科学版) Nov. 2018
第 55 卷 第 6 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 55 No. 6

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.06.021

金刚石晶格上 S^4 模型的相变

尹训昌,刘万芳,祝祖送,马业万,闻 军,章礼华
(安庆师范大学物理与电气工程学院,安庆 246011)

摘 要:应用实空间重整化群的方法,研究了金刚石晶格上 S^4 模型的相变,求得了系统的临界点. 分析可知,本系统只存在 Gauss 不动点而无 Wilson Fisher 不动点,与金刚石晶格上的 Gauss 模型相比较,系统具有相同的临界点,表明它们属于同一个普适类.

关键词:金刚石晶格;S^4 模型;重整化群
中图分类号:O414.13 **文献标识码**:A **文章编号**:0490-6756(2018)06-1261-04

Phase transition of the S^4 model on diamond lattice

YIN Xun-Chang, LIU Wan-Fang, ZHU Zu-Song, MA Ye-Wan, WEN Jun, ZHANG Li-Hua
(School of Physics and Electric Engineering, Anqing Normal University, Anqing 246011, China)

Abstract: According to the real space renormalization group method, the phase transition of S^4 model on a diamond lattice is studied, and its critical points are obtained. The results show that there only exist a Gaussian fixed point and the Wilson-Fisher fixed point is not found. Compared to the Gauss model on a diamond lattice, they have the same critical points. The results indicate that the two systems belong to the same university class.

Keywords: Diamond lattice; S^4 mode; Renormalization-group

1 引 言

相变在自然界中广泛存在,像熟知的水的三态转变就属于相变范畴,自旋模型的相变一直是凝聚态物理中的一个重要分支. 以自旋取值作为分类依据,自旋模型可分为离散型和连续型两大类. 离散型只能取一些离散数值,如 Ising 模型和 Potts 模型,而 S^4 模型和 Gauss 模型则属于连续模型,它们的自旋可以在整个实数空间连续取值. 最初相变的研究主要集中在具有平移对称晶格上,此晶格具有平移对称性. 随着研究的深入,人们对分形维数可以取非整数的分形晶格产生了浓厚的兴趣. 上世纪八十年代,Gefen 等开创性的讨论了几种简单分形上离散模型的相变,得到了一些有意义的结果[1-4]. 从此以后,分形晶格上的相变问题成了一个研究热点,人们持续关注这一热点并得到了一系列有趣的结论[5-17]. 1999 年,Kong 等[7]讨论了金刚石晶格上 Gauss 模型的相变,由递推关系求得了系统的临界点. 与只能取有限值的离散模型相比较,S^4 模型和 Gauss 模型的自旋都可以连续取值. 与 Gauss 模型相对比,S^4 模型具有极大的优越性,即多了一个四次方项相互作用参数,它在研究相变问题时起着决定性的作用,S^4 模型更接近自然界中的真实系统. 因此,讨论 S^4 模型的相变可以更好的理解自然界中的相变. 迄今为止,金刚石晶格上 S^4 模型的相变还未见报道. 本文应用累积展开和实空间重整花群的方法,我们研究了金刚石晶格上 S^4 模型的相变,得到了系统的递推关系和临界点.

收稿日期:2017-06-14
基金项目:国家自然科学基金(11604002);安徽省自然科学基金(1708085MA10, 1808085MA20);安徽高校自然科学重点项目(KJ2018A0366, gxyq2017027)
作者简介:尹训昌(1979—),男,汉族,硕士,副教授,主要从事凝聚态物理研究. E-mail: yxc0212@163.com

2 金刚石晶格和 S^4 模型

金刚石晶格的构建过程如图 1 所示. 该晶格通过迭代过程产生,基本单元(即 $n=0$ 级)是由两个格点和一个键组成的晶格,再用六个基本单元构造一个生成元(即 $n=1$ 级),然后生成元的每一个键再替换为生成元本身,这样的步骤重复无穷多次,最后就得到金刚石晶格. 该晶格是有代表性的非均匀分形,即格点的配位数因格点的位置不同而不同. 它的分形维数为 $d_f=\ln 6/\ln 3=1.631$.

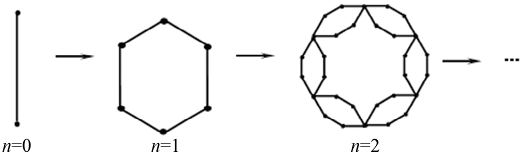

图 1 金刚石晶格的构造过程

Fig. 1 The constructional procedure ofdiamond lattice

金刚石晶格上 S^4 模型的有效的哈密顿量

$$H = K\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j - \sum_i \frac{b_i}{2} s_i^2 - \sum_i u_i s_i^4 \qquad (1)$$

其中,K 为两个自旋 s_i 和 s_j 之间的约化相互作用参量,格点 s_i 上的 Gauss 分布常数用 b_i 表示,u_i 用来表示四次方项的相互作用参数. 为了求解该晶格上的相变,假设 Gauss 分布常数和四次方项的相互作用参数与格点的配位数有关,即满足

$$b_i/b_j = u_i/u_j = q_i/q_j \qquad (2)$$

3 重整化群的变换过程

为了便于描述,取生成元来展示重整化群过程. 图 2(Ⅰ)为金刚石晶格的生成元,格点的位置分别用不同的字母和数字来表示,每个格点的配位数与格点的位置密切有关. 分析可知,$q_a=2^n$,$q_b=4$,$q_1=q_{1'}=q_2=q_{2'}=2$. 由(1)式,此生成元的有效哈密顿量为

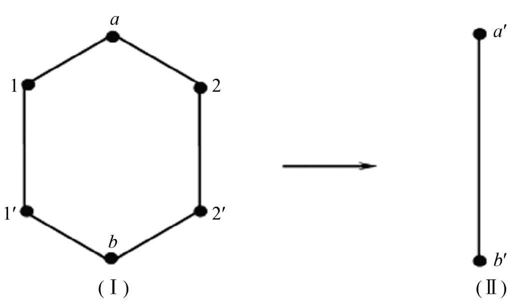

图 2 金刚石晶格的重整化群过程

Fig. 2 Therenormalization group procedure of diamond lattice

$$H=H_0+V \qquad (3)$$

其中

$$H_0 = K\sum_{i=1}^{2}(s_i s'_i + s_a s_i + s_b s'_i) - \frac{b_2}{2}\sum_{i=1}^{2}(s_i^2 + s'^2_i) - \frac{b_{2^n}}{2}\frac{s_a^2}{2^{n-1}} - \frac{b_4}{2}\frac{s_b^2}{2} - u_{2^n}\frac{s_a^4}{2^{n-1}} - u_4\frac{s_b^4}{2} \qquad (4)$$

$$V = -u_2\sum_{i=1}^{2}(s_i^4 + s'^4_i) \qquad (5)$$

为了区分,用 s'_a,s'_b 来分别表示图 2(Ⅱ)中格点位置 a'和 b'上的自旋,经过重整化群变换消去内部格点后图 2(Ⅰ)变为图 2(Ⅱ),此过程表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 \exp(H) = P\exp(H') \qquad (6)$$

其中 P 表示与格点自旋无关的重整化常数,H'表示变换后的有效哈密顿量.

为了便于计算,把有效哈密顿量分成 H_0 和 V 两部分,把 V 作为 H_0 的微扰项进行计算. 由正则系统配分函数的定义得到

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} ds_a ds_b \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0+V} \qquad (7)$$

定义部分迹

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0+V} \qquad (8)$$

上式改写为

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0+V}}{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0}} = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0} \langle e^V\rangle_0 \qquad (9)$$

其中

$$\langle\cdots\rangle_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 (\cdots) e^{H_0}}{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0}} \qquad (10)$$

称(10)式为累积平均.

由于 V 是个很小的微扰,进行级数展开为

$$\langle e^V\rangle_0 = e^{\langle V\rangle_0 + (1/2)(\langle V^2\rangle_0 - \langle V\rangle_0^2) + \cdots} \qquad (11)$$

把(11)式代入(9)式得

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0} e^{\langle V\rangle_0 + (1/2)(\langle V^2\rangle_0 - \langle V\rangle_0^2) + \cdots} \qquad (12)$$

约去内部自旋 s_1,s_2,s'_1 和 s'_2 后,系统的有效的哈密顿量改写为

$$H' = \ln(PT) = H'_0 + \langle V\rangle_0 + \frac{1}{2}(\langle V^2\rangle_0 - \langle V\rangle_0^2) \qquad (13)$$

由(12)式可得

$$H'_0 = \ln(\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0}) = k_{11} s_a s_b + k_{12}(s_a^2 + s_b^2) + k_{13}(s_a^4 + s_b^4) \tag{14}$$

其中

$$k_{11} = \frac{2K^3}{b_2^2 - K^2}$$

$$k_{12} = \frac{2b_2(b_2^2 - 3K^2)}{4(K^2 - b_2^2)}$$

$$k_{13} = -u_2$$

由(5)和(10)式,可知

$$\langle V \rangle_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 (\cdots) e^{H_0}}{\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 e^{H_0}} = k_{21} s_a s_b + k_{22}(s_a^2 + s_b^2) + k_{23}(s_a^4 + s_b^4) \tag{15}$$

其中

$$k_{21} = -\frac{48 b_2 K^3 (b_2^2 - b_2 K) u_2}{(b_2 - K)^4 (b_2 + K)^3}$$

$$k_{22} = -\frac{12 K^2 (b_2^2 - b_2 K)(b_2^2 + K^2) u_2}{(b_2 - K)^4 (b_2 + K)^3}$$

$$k_{23} = -\frac{2K^4 (b_2^4 + K^4) u_2}{(b_2^2 - K^2)^4}$$

通过(5)、(10)和 (15) 式,得到

$$\frac{1}{2}(\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle_0^2) = k_{31} s_a s_b + k_{32}(s_a^2 + s_b^2) + k_{33}(s_a^4 + s_b^4) \tag{16}$$

上式中

$$k_{31} = 96K^3(19b_2^6 - 38b_2^5 K + 30b_2^4 K^2 - 22b_2^3 K^3 + 13b_2^2 K^4 - 4b_2 K^5 + 2K^6) u_2^2 / [(b_2 - K)^7 (b_2 + K)^5]$$

$$k_{32} = 48K^2(8b_2^7 - 16b_2^6 K + 25b_2^5 K^2 - 34b_2^4 K^3 + 24b_2^3 K^4 - 14b_2^2 K^5 + 7b_2 K^6) u_2^2 / [(b_2 - K)^7 (b_2 + K)^5]$$

$$k_{33} = 24b_2 K^4(7b_2^6 - 7b_2^5 K + 4b_2^4 K^2 - 4b_2^3 K^3 + 17b_2^2 K^4 - 17b_2 K^5) u_2^2 / [(b_2 - K)^7 (b_2 + K)^5)]$$

根据式(13～16),得到经过重整化群变换后系统的有效的哈密顿量

$$H' = (k_{11} + k_{21} + k_{31}) s_a s_b + (k_{12} + k_{22} + k_{32})(s_a^2 + s_b^2) + (k_{13} + k_{23} + k_{33}) \times (s_a^4 + s_b^4) \tag{17}$$

为了保证重整化群变换前后的哈密顿量表达式一致,对自旋进行重新标度,令 $s'_i = \xi s_i (i = a, b)$,自旋重标后系统的哈密顿量改写为

$$H' = K' s'_a s'_b - \frac{b_{2^{n-1}}}{2} \frac{s_a^2}{2^{n-1}} - \frac{b_2}{2} \frac{s_b^2}{2} - u'_{2^{n-1}} \frac{s_a^4}{2^{n-1}} - u'_2 \frac{s_b^4}{2} \tag{18}$$

上式中

$$\xi = \sqrt{-\frac{4}{b_2}(k_{12} + k_{22} + k_{32})} \tag{19}$$

$$K' = (k_{11} + k_{21} + k_{31}) / \xi^2 \tag{20}$$

$$u' = -2(k_{13} + k_{23} + k_{33}) / \xi^4 \tag{21}$$

(20)和(21)式称为重整化群的递推关系.

4　结　论

由递推关系,求得系统的临界点为($K^* = b_2/2, u_2^* = 0$). 根据重整化群变换理论,得到关联长度的临界指数 $\nu = 0.5$. 以前的工作表明,S^4 模型一般存在两个不动点,一个为 Gauss 不动点外,另外一个为 Wilson-Fisher 不动点,且 Wilson-Fisher 不动点对系统的临界特性有决定性的作用. 但是,本文所研究的金刚石晶格上的 S^4 模型出现了一个有趣的结果,即只存在一个 Gauss 不动点,而并没有 Wilson-Fisher 不动点. 究其原因是该晶格的分形维数 $d_f = 1.631 \langle 2$,进一步验证了只要分形维数小于 2 系统只有 Gauss 不动点而无 Wilson-Fisher 不动点的结论. 结果表明,金刚石晶格上的 S^4 模型和该晶格上的 Gauss 模型的具有相同的临界点,表明它们属于一个普适类. 分析可知,金刚石晶格上的 S^4 模型和 Ising 模型具有不同的临界点,属于不同的普适类,但如果我们取合适的参数即 $b = -4u$ 时,S^4 模型和 Ising 模型又属于同一个普适类.

参考文献:

[1]　Gefen Y, Mandelbrot B, Aharony A. Critical phenomena on fractal lattices [J]. Phys Rev Lett, 1980, 45: 855.

[2]　Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B. Phase transitions on fractals (Ⅰ) [J]. J Phys A, 1983, 16: 1267.

[3]　Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B. Phase transitions on fractals (Ⅱ) [J]. J Phys A, 1984, 17: 435.

[4]　Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B. Phase transitions on fractals (Ⅲ) [J]. J Phys A, 1984, 17: 1277.

[5]　Yang Z R. Family of diamond-type hierarchical lattices [J]. Phys Rev B, 1988, 38: 728.

[6]　Li S, Yang Z R. Real-space renormalization-group study of the phase transition in a Gaussian model of fractals [J]. Phys Rev E, 1997, 55: 6656.

[7] Kong X M, Li S. Critical behavior of the Gaussian model on diamond-type hierarchial lattices [J]. Sci Chin A, 1999, 42: 325.

[8] Zhu J Y, Zhu H. Critical slowing down of the Gaussian spin system on diamond-type hierarchical lattices [J]. Chin Phys, 2003, 12: 264.

[9] Li Y, Kong X M. Critical properties of the S^4 model on diamond-type hierarchial lattices [J]. Physica A, 2005, 356: 589.

[10] Sun C F, Kong X M, Yin X C. A solvable decorated Ising lattice model [J]. Commun Theor Phys, 2006, 45: 555.

[11] 邹维科,孔祥木,王春阳,等. 三维钻石型等级晶格上量子 Heisenberg 系统的临界性质[J]. 物理学报, 2010, 59: 4874.

[12] 孙春峰. 镶嵌正方晶格上 Gauss 模型的相图[J]. 物理学报, 2012, 61: 086802.

[13] Chen X, Zhang J S. Biometric feature extraction using local fractal auto-correlation [J]. Chin Phys B, 2014, 23: 096401.

[14] 尹训昌,刘万芳,祝祖送,等. Sierpinski 地毯上 S^4 模型的临界特性[J]. 物理学报, 2015, 64: 016402.

[15] 曾全荣. 等级晶格上 Ashkin-Teller 模型的相变[J]. 江西科学, 2016, 34: 514.

[16] 陈克萍,吕鹏,王海鹏. 微重力条件下 Cu-Zr 共晶合金的液固相变研究[J]. 物理学报, 2017, 66: 068101.

[17] 李季凡,王忠龙,尹重阳,等. Fe 掺杂 VO_2 的相变和磁性研究[J]. 低温物理学报, 2017, 39: 6.

引用本文格式:

中 文:尹训昌,刘万芳,祝祖送,等. 金刚石晶格上 S^4 模型的相变[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2018, 55: 1261.

英 文:Yin X C, Liu W F, Zhu Z S, *et al*. Phase transition of the S^4 model on diamond lattice [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 1261.