

doi: 103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 03. 018

Oustaloup 分抗电路的运算特征与逼近性能分析

刘盼盼, 袁 晓, 陶 磊, 易 舟

(四川大学电子信息学院, 成都 610065)

摘 要: 从全新的分数微积分运算角度考察 Oustaloup 分抗有理逼近问题. 以阶频特征函数与相频特征函数为分析的理论基础, 从零极对子系统的运算特征入手, 根据零极点递进分布情形, 定量研究 Oustaloup 分抗逼近电路系统的运算特征与逼近性能. 使用相对误差函数, 逼近带宽, 指标, 复杂度与逼近效益等工具与参量进行运算性能与逼近效益的定量分析. 理论分析结果表明, 阶频特征函数与相频特征函数共同表征了分抗逼近电路的运算特征与逼近性能, 它们的数学表达式简洁、明了、准确, 且 Oustaloup 分抗有理逼近速度较快、复杂度较低.

关键词: 分数微积分; 有理逼近; 阶频特征函数; 零极点分布; 逼近误差; 运算性能

中图分类号: TP211; TN98 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2016)02-0353-08

Operational characteristic and approximation performance analysis of Oustaloup fractance circuits

LIU Pan-Pan, YUAN Xiao, TAO Lei, YI Zhou

(College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: The Oustaloup fractance approximation topic is investigated from a new operational perspective of the fractional calculus. Based on the order-frequency characteristic function and the phase-frequency characteristic function, start from the operational behaviors of a pole-zero pair subsystem, according to the pole-zero recursive distribution, we study quantitatively the operational characteristics and the approximation performance of the Oustaloup's fractance circuit system. The tools and parameters such as relative error function, approximation bandwidth, K-index, complexity and approximation effect are used. Theoretical results show that the phase-frequency characteristics function and the order-frequency characteristics function jointly represent the operational characteristics and the approximation performance of fractance approximation circuits, their mathematical expressions are concise, clear, and exactly, and the Oustaloup fractance rational approximation has faster approximation speed and lower complexity.

Key words: Fractional calculus; Rational approximation; Order-frequency characteristic function; Pole-zero distribution; Approximation error; Operational performance

1 引 言

近些年来,分数阶微积分理论与应用成为众多领域的研究热点^[1-2]. 特别在信号处理与控制^[3-6]、

图像处理^[7]、分数阶 PID 控制器设计^[8]等领域. 分数阶微积分理论在控制系统中的应用主要分为分数阶系统建模和分数阶控制器设计. 与分数阶系统建模相比较,分数阶控制器设计相对简单,因此得到广

收稿日期: 2015-03-27

基金项目: 成都市科技计划项目(12DXYB255JH-002); 四川省科技支撑计划项目(2013SZ0071)

作者简介: 刘盼盼(1989-), 女, 硕士研究生, 研究方向为分数阶电路与系统理论. E-mail: scu_lpp@163.com

通讯作者: 袁晓. E-mail: scu_yx@126.com.

泛研究. Podlubny^[8] 提出 $PP^{\alpha}D^{\mu}$ 分数阶微积分控制器的概念, Oustaloup^[9-11] 开发了 CRONE 控制器. 随着分数阶控制理论的快速发展, 分数阶微积分理论在系统控制领域中的研究与探索有着深远的理论意义和实际应用价值.

由于分数阶控制器内部结构包括比例系数、积分系数和微分系数模块, 所以, $PP^{\alpha}D^{\mu}$ 的控制器实现的核心是分数阶微积分算子 s^{μ} ^[12-14] (μ 为运算阶^[15-16]) 的数值计算和整数阶有理逼近. 近些年来, 国内外相继提出几种分数阶微积分算子 s^{μ} 间接有理逼近的重要方法. 文献[8]提出用连分式扩展实现 s^{μ} 有理逼近. 此外, 实现 s^{μ} 的逼近有 Matsuda^[17]、Carlson^[18]、Chareff^[19]、Oustaloup^[9] 方法等. Matsuda 方法对 s^{μ} 在确定的等对数间隔频率点上进行连分式展开, 是连分式展开的一种特例. Carlson 方法是利用正则牛顿迭代法来求解 $(1/s)^{1/n}$ 的有理逼近阻抗函数序列^[14, 18]. Charef 方法对 $1/(1+s/p_T)^{\mu}$ ($1/p_T$ 为松弛时间常数) 传递函数形式进行零极点近似. 以上这些算法虽然在幅频特性上有较好的近似, 但没有考虑相频特性上的逼近^[14, 20]. Oustaloup 方法在频率响应的幅频特性及相频特性方面均具有较好的近似, 因此在近年来得到广泛研究. 文献[20]提出了改进的 Oustaloup 滤波器算法, 文献[21]提出最优 Oustaloup 实现算法, 文献[4]对 Oustaloup 复分数阶阻抗序列 $D(s) = (s/\omega_u)^{\alpha+\beta}$ 进行有理逼近, 把 $D(s)$ 分解成实部 $D_r(s)$ 和虚部 $D_i(s)$, 探究不同分数阶下 $D_r(s)$ 和 $D_i(s)$ 幅频、相频特性及零极点递归分布. 以上对 Oustaloup 逼近的频域分析仅在限定的频带内, 只从传统的幅频和相频方面来考虑. 对于分抗逼近电路而言, 微积分运算特征更多的隐藏在幅频特征的过渡带内, 传统的幅频特征在分析不同分抗逼近电路的运算性能时会受到增益的影响, 不具有统一性. 分数阶运算特征的恒相特征也只反映分抗逼近电路运算特征的一个方面, 比如, Hilbert^[22-24] 变换具有恒相特征, 但其运算阶始终为零. 因此, 以上研究并不能从整体上全面把握分数阶电路的运算特征和逼近性能. 文献[8]中提出阶频特征与相频特征一起表征与刻画分数阶系统的运算本质——分数阶微积分运算性质. 但至今并未有文献从微积分运算角度对 Oustaloup 分抗逼近电路的运算与逼近性能进行分析, 因此全面考察其运算特征很有必要.

本文目的在于, 使用阶频特征函数与相频特征函数分析理论^[14], 定量考察 Oustaloup 分抗有理逼

近的运算特征与逼近性能. 为理论上全面把握与理解 Oustaloup 分抗有理逼近的数学原理以及应用提供坚实的基础. 内容安排如下: (1) 简要介绍 Oustaloup 分抗有理逼近系统, 引入运算特征函数; (2) 分析系统参数对运算特性的影响; (3) 利用相对误差函数, 逼近带宽指数, K 指标, 逼近效益等性能指标对 Oustaloup 分抗有理逼近进行全面的运算与逼近性能分析. 最后进行简单总结.

2 Oustaloup 分抗有理逼近系统

2.1 Oustaloup 有理逼近系统

Oustaloup 分抗有理逼近系统的传递函数 $D_N(s)$ 为^[9]

$$D_N(s) = (\Omega_u/\Omega_h)^{\mu} \prod_{i=-N}^N E_i(s) \quad (1)$$

$$E_i(s) = \frac{s + \Omega'_i}{s + \Omega_i}, \quad -N \leq i \leq N \quad (2)$$

$$\Omega'_i = \Omega_b (\Omega_h/\Omega_b)^{(N+i+1/2(1-\rho))/(2N+1)} \quad (3)$$

$$\Omega_i = \Omega_b (\Omega_h/\Omega_b)^{(N+i+1/2(1+\rho))/(2N+1)} \quad (4)$$

$$\alpha = \Omega_i/\Omega'_i, \quad \beta = \Omega'_{i+1}/\Omega_i \quad (5)$$

式中 s 为拉普拉斯变量, μ 为系统的运算阶 ($|\mu| < 1$). $\Omega_b/\Omega_u = \Omega_u/\Omega_h$, $\Omega_u = \sqrt{\Omega_b\Omega_h}$, Ω_h 、 Ω_b 为高低转折频率, Ω'_i 、 Ω_i 分别为第 i 个零点、极点, $E_i(s)$ 称为第 i 个零极对子系统. 由 (3)~(5) 式得:

$$\alpha = (\Omega_h/\Omega_b)^{\frac{\mu}{2N+1}}, \quad \beta = (\Omega_h/\Omega_b)^{\frac{1-\mu}{2N+1}} \quad (6)$$

2.2 Oustaloup 有理逼近的运算特征

子系统 $E_i(s)$ ($-N \leq i \leq N$) 的阶频特征函数与相频特征函数分别定义为 (令 $s = j\Omega$)^[14]

$$u_i(\Omega) = \frac{d \lg |E_i(j\Omega)|}{d \lg \Omega}, \quad (-N \leq i \leq N) \quad (7)$$

$$\vartheta_i(\Omega) = \frac{2}{\pi} \arg[E_i(j\Omega)] \quad (8)$$

Oustaloup 系统的阶频和相频特征函数分别为

$$\mu_N(\Omega) = \sum_{i=-N}^N u_i(\Omega), \quad \theta_N(\Omega) = \sum_{i=-N}^N \vartheta_i(\Omega) \quad (9)$$

Oustaloup 有理逼近的目的: 调整参量 α 与 β , 使 $\mu_N(\Omega)$ 、 $\theta_N(\Omega)$ 分别逼近理想值.

$$\mu_N(\Omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu, \quad \theta_N(\Omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \mu \quad (10)$$

也即有:

$$D_N(s) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f_{\mu} s^{\mu} \quad (11)$$

图 1 (a) 和 (b) 分别描述了 $N = 4$ (零极对 (Ω'_i , Ω_i) 数目为 9, $\alpha = \beta = 2.7826$, $\Omega_h = 10^4$, $\Omega_b = 10^{-4}$, $\mu = 1/2$) 时 Oustaloup 分抗有理逼近的相频

$\theta_N(\Omega)$ 和阶频 $\mu_N(\Omega)$ 曲线, 可以看出, 在一定的频带范围内近似理想曲线(图中水平虚直线), 即通过对 Oustaloup 分抗系统函数进行恰当的零极对的配置, 就能很好地逼近理想分抗函数 $f_\mu s^\mu$. 当零极对配置不同时, 逼近曲线和理想曲线存在的波动幅度不同, 因此必须考虑零极对配置对系统的影响.

3 系统参数对运算特性的影响

为简化考虑有理逼近的影响因素, 考虑单个零极对 (Ω'_i, Ω_i) 构成的子系统 $E_i(s)$, 令 $\Omega_0 = \sqrt{\Omega'_i \Omega_i}$

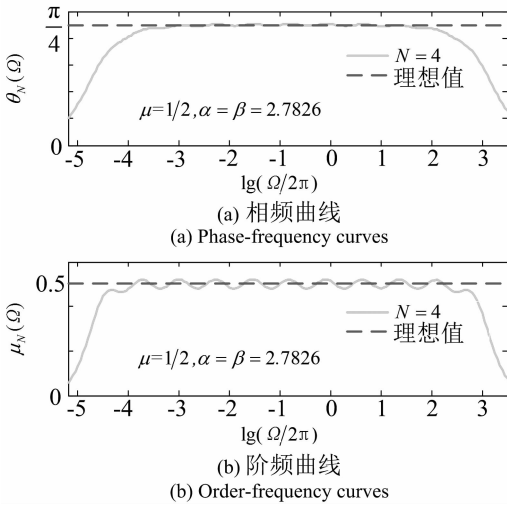


图 1 Oustaloup 分抗有理逼近的相频和阶频曲线
Fig. 1 Phase and order frequency curves of Oustaloup fractance rational approximation

(称为 $E_i(s)$ 的特征频率). 把 $s = j\Omega$ 代入 $E_i(s)$, 令

$$\bar{\omega}_0 = \lg\left(\frac{\Omega_0}{2\pi}\right), \bar{\omega} = \lg\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right), \lambda = \lg\left(\frac{\Omega_h}{\Omega_l}\right) \quad (12)$$

则由(7)、(8)式求得 $E_0(s)$ ($i = 0$) 的阶频、相频分别为

$$u_0(\bar{\omega}) = \frac{10^{2(\bar{\omega}-\bar{\omega}_0)}(\alpha^2 - 1)}{(10^{2(\bar{\omega}-\bar{\omega}_0)} + \alpha)(\alpha 10^{2(\bar{\omega}-\bar{\omega}_0)} + 1)} \quad (13)$$

$$\vartheta_0(\bar{\omega}) = \frac{2}{\pi} \text{atan}(\sqrt{\alpha} \cdot 10^{\bar{\omega}-\bar{\omega}_0}) - \frac{2}{\pi} \text{atan}\left(\frac{10^{\bar{\omega}-\bar{\omega}_0}}{\sqrt{\alpha}}\right) \quad (14)$$

且有

$$\lg \alpha = \frac{2\mu\lambda}{2N+1}, \lg \beta = \frac{2(1-\mu)\lambda}{2N+1} \quad (15)$$

$$k = 2N+1 \quad (16)$$

由式(15)和式(16)得

$$\lg \alpha + \lg \beta = 2\lambda/k \quad (17)$$

由以上知, 对于给定的运算阶 μ 和逼近带宽指数 λ , 零极对个数 $2N+1$, 极零比 α , 均对子系统 $E_i(s)$ 的阶频、相频产生影响. 由于 Oustaloup 有理逼近系统由零极对子系统叠加得到, 因此其阶频和相频不仅与 $2N+1$ 有关, 与 α 、 β 也有关. 令

$$W = \lg \alpha + \lg \beta \quad (18)$$

则有

$$\begin{cases} u_i(\bar{\omega}) = u_0(\bar{\omega} - iW) \\ \vartheta_i(\bar{\omega}) = \vartheta_0(\bar{\omega} - iW) \\ i \in Z, \bar{\omega} \in R \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \mu_N(\bar{\omega}) = \sum_{i \in Z} u_i(\bar{\omega}) = \sum_{i \in Z} u_0(\bar{\omega} - iW) \\ \theta_N(\bar{\omega}) = \sum_{i \in Z} \vartheta_i(\bar{\omega}) = \sum_{i \in Z} \vartheta_0(\bar{\omega} - iW) \end{cases} \quad (20)$$

式中 $u_0(\bar{\omega})$ 、 $\vartheta_0(\bar{\omega})$ 为子系统 $E_0(s)$ 的阶频、相频特征.

由式(20)根据叠加等阶性^[14]要求, 有

$$\begin{cases} \int_0^W \mu_N(\bar{\omega}) d\bar{\omega} = W\mu \Leftrightarrow \int_{\bar{\omega}} u_0(\bar{\omega}) d\bar{\omega} = \lg \alpha = W\mu \\ \int_0^W \theta_N(\bar{\omega}) d\bar{\omega} = W\mu \Leftrightarrow \int_{\bar{\omega}} \vartheta_0(\bar{\omega}) d\bar{\omega} = \lg \alpha = W\mu \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \mu_{\max} = \mu_{\max}(\alpha, \mu) = m_u(\alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(\alpha^2 - 1)}{(\alpha + 10^{2i\lg\alpha/\mu})(\alpha + 10^{-2i\lg\alpha/\mu})} \\ \mu_{\min} = \mu_{\min}(\alpha, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2(\alpha^2 - 1)}{(\alpha + 10^{(2i+1)\lg\alpha/\mu})(\alpha + 10^{-(2i+1)\lg\alpha/\mu})} \end{cases} \quad (22)$$

式中 μ_{\max} 、 μ_{\min} 为 $\mu_N(\bar{\omega})$ 的波峰值、波谷值, $m_u(\alpha)$ 为多个子系统阶频的均值, 等于理想值 μ .

由式(22)绘制的 μ_{\max} 、 μ_{\min} 随 $\lg \alpha$ 变化的曲线如图 2 所示.

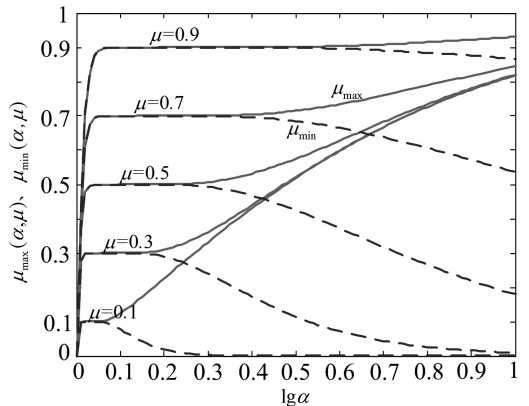


图 2 $\mu_{\max}(\alpha, \mu)$ 、 $\mu_{\min}(\alpha, \mu)$ 曲线图
Fig. 2 $\mu_{\max}(\alpha, \mu)$ 、 $\mu_{\min}(\alpha, \mu)$ curves

3.1 极零比 α 对阶频特性影响

由图 2 得, Oustaloup 有理逼近的 $\mu_{\max}(\alpha, \mu)$ 和 $\mu_{\min}(\alpha, \mu)$ 在一定范围内近似等于运算阶 μ . 当 $\lg\alpha$ 超过某阈值时, 两者的差距变的越来越大, 而 $\mu_{\max}(\alpha, \mu)$ 和 $\mu_{\min}(\alpha, \mu)$ 越接近越好, 从另一方面来说为了降低电路元件的个数 $2N + 1$, α 越大越好, 所以对于固定阶数的电路, $\mu_{\max}(\alpha, \mu)$ 和 $\mu_{\min}(\alpha, \mu)$ 开始分离处的 α 值是构建逼近电路的理想选择.

3.2 零极对个数对阶频特性影响

图 3(a)和(b)分别描述了 $N = 3 (k = 7)$ 、 $N = 4 (k = 9)$ 时, 各子系统阶频 $u_i(\omega)$ 曲线和 Oustaloup 有理逼近阶频 $\mu_N(\omega)$ 曲线图 ($\mu = 1/2$). 图 4(a)和 (b)分别描述了 $N = 2 (k = 5)$ 、 $N = 3 (k = 7)$ 时, 各子系统相频曲线 $\vartheta_i(\omega)$ 和 Oustaloup 有理逼近相频 $\theta_N(\omega)$ 曲线图 ($\mu = 1/2$). 图 3 和图 4 中 $u_i(\omega)$ 、 $\vartheta_i(\omega)$ 分别代表第 i 个子系统的阶频、相频, $\mu_N(\omega)$ 、 $\theta_N(\omega)$ 分别代表第 i 个子系统的阶频、相频, $\mu_N(\omega)$ 、 $\theta_N(\omega)$ 分别代表第 i 个子系统的阶频、相频, $\mu_N(\omega)$ 、 $\theta_N(\omega)$ 分别代表第 i 个子系统的阶频、相频.

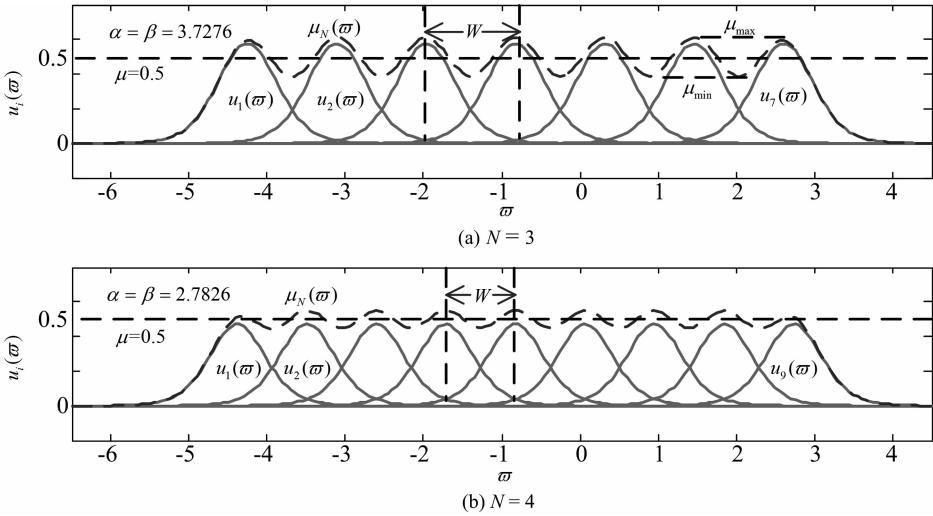


图 3 子系统阶频与 Oustaloup 阶频曲线: $N = 3, 4$
Fig. 3 Order-frequency of subsystem and Oustaloup order-frequency curves: $N = 3, 4$

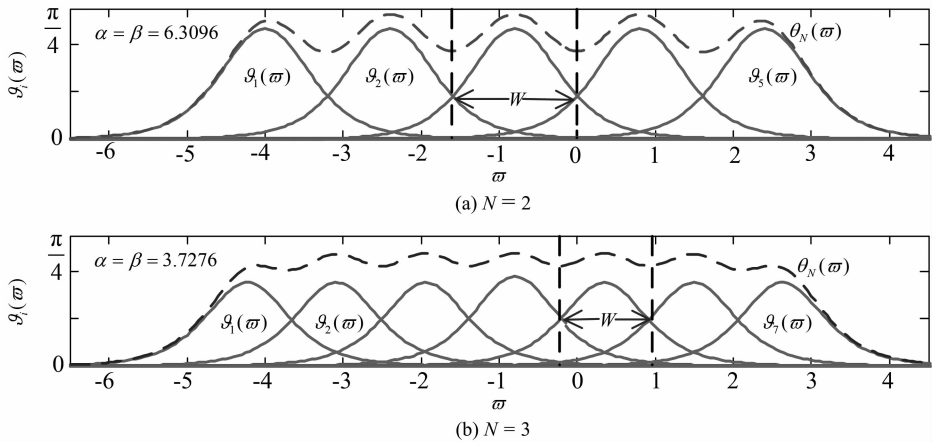


图 4 子系统相频与 Oustaloup 相频曲线: $N = 2, 3$
Fig. 4 Phase-frequency of subsystem and Oustaloup phase-frequency curves: $N = 2, 3$

$\theta_N(\omega)$ 分别为 Oustaloup 系统的阶频、相频. 据图可得, 零极对个数 $2N + 1$ 越大, $\mu_N(\omega)$ 、 $\theta_N(\omega)$ 波动的幅度越小, 阶频和相频曲线越趋于稳定. 这正反映了图 2 所得结论——超过某阈值, 随 $\lg\alpha$ 的增大, 极值差 $\mu_{\max}(\alpha, \mu) - \mu_{\min}(\alpha, \mu)$ 增大.

多, $\lg\alpha$ 、 $\lg\beta$ 减小, 因此 μ_{\max} 和 μ_{\min} 之差变小, $\mu_N(\omega)$ 的波动变小. 所以图 3 和图 4 中 N 较大时, Oustaloup 系统的阶频和相频更接近理想值 μ .

4 逼近性能分析指标

4.1 逼近误差函数

为了展示实际分抗与理想分抗的差异情况, 可

图 3 和图 4 同时验证了理论公式(15), 在逼近频带 (Ω_b, Ω_h) 内, 若给定运算阶 μ , 零极对个数越

以比较有理逼近系统函数与理想分抗系统函数的误差, 来对逼近效果进行分析. 因此从幅度和相位角度分别定义分抗的阶频相对误差 $r_\mu(\Omega)$ 和相位相对误差 $r_\theta(\Omega)$:

$$r_\mu(\Omega) = \frac{\mu - \mu_N(\Omega)}{\mu} \times 100\% = (1 - \frac{\mu_N(\Omega)}{\mu}) \times 100\% \quad (23)$$

$$r_\theta(\Omega) = \frac{\theta - \theta_N(\Omega)}{\theta} \times 100\% = (1 - \frac{\theta_N(\Omega)}{\theta}) \times 100\% \quad (24)$$

4.2 逼近精度与逼近带宽指数

任何实际电路元件的频率特性都只能在一定的频段内满足或逼近理想情况, 这个频段称为“逼近频段”, 比较 Oustaloup 有理逼近法得到的分抗与理想分抗的误差, 可事先指定一个较小的正数 ϵ_0 . 若有

$$\begin{cases} |r_\mu(\Omega_l)| = |r_\mu(\Omega_r)| = \epsilon_0 \\ |r_\mu(\Omega)| \leq \epsilon_0, \Omega \in [\Omega_l, \Omega_r] \end{cases} \quad (25)$$

则可将该分抗的阶频逼近带定义为 $[\Omega_l, \Omega_r]$, 阶频逼近带宽指数定义为 $\beta_{O_j}(k) = \lg(\Omega_r/\Omega_l)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), 同理, 若有

$$\begin{cases} |r_\theta(\Omega_l)| = |r_\theta(\Omega_r)| = \epsilon_0 \\ |r_\theta(\Omega)| \leq \epsilon_0, \Omega \in [\Omega_l, \Omega_r] \end{cases} \quad (26)$$

将相频逼近带宽指数定义为 $\beta_{P_j}(k) = \lg(\Omega_r/\Omega_l)$, 若定义 $\epsilon_0 = 1\%$ 为一级精度, $\epsilon_0 = 5\%$ 为二级精度, $\epsilon_0 = 10\%$ 为三级精度, $\epsilon_0 = 20\%$ 为四级精度, 可将逼近带宽指数作为一个重要指标, 在不同精度下对 Oustaloup 有理逼近效果进行测评和比较.

4.3 K 指标

除了逼近带宽之外, 系统的 K 指标^[14]也是衡量逼近效果好坏的重要指标. 对不同分抗而言, 有些方法设计出的分抗逼近带宽随系统复杂度变化的速度较快, 而有些较慢, 因此可以用 K 指标来对这种变化趋势进行度量, 对分抗逼近电路的逼近性能进行定量分析与比较. K 指标的大小从一个侧面表明在解决分抗逼近问题的过程中, 不同设计方法性能的优劣. K 指数定义如下:

$$\begin{cases} K_{O_j}(k) = \beta_{O_j}(k) - \beta_{O_j}(k-1) \\ K_{P_j}(k) = \beta_{P_j}(k) - \beta_{P_j}(k-1) \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \beta_{O_j}(k) \approx K_O(k - k_{O_j}), k > k_{O_j} \\ \beta_{P_j}(k) \approx K_P(k - k_{P_j}), k > k_{P_j} \end{cases} \quad (28)$$

式中 k_{O_j} 与 k_{P_j} 是一些常数, 它们完全由逼近

电路的类型所确定, 其几何意义是逼近带宽指数 $\beta_{O_j}(k)$ 、 $\beta_{P_j}(k)$ 曲线的直线段延长线与横坐标的交点位置值. 显然, k_{O_j} 与 k_{P_j} 越小, 逼近性能越好. $K_{O_j}(k)$ 、 $K_{P_j}(k)$ 表示阶频和相频 K 指数. 由 (27) 式可以看出, K 指数的实质就是以 k 为横坐标, β_{O_j} 或 β_{P_j} 为纵轴的曲线斜率.

4.4 复杂度与逼近效益

由式 (1) 知, $k = 2N + 1$ 是 Oustaloup 分抗有理逼近系统的次数, 也表示实现电路所需的电阻与电容元件个数, 是系统的复杂度. 系统的复杂度是衡量逼近代价高低的重要指标 (当然也与逼近效果密切相关). 在逼近带宽度相同的情况下, 根据网络综合理论, 系统复杂度越低, 在网络综合的过程中所用的元件个数越少, 系统的结构越简单, 也越容易实现. 对同一分抗而言, 逼近带宽和复杂度是相互矛盾相互制约的两个指标, 要扩展逼近带宽度, 就必须增大系统函数复杂度. 对不同分抗而言, 不同方法设计出的分抗逼近带宽随系统复杂度变化的速度不同. 为了从整体上衡量分抗逼近电路效益, 定义逼近带宽指数与电路复杂度之比

$$\eta_o(k) = \beta_o(k)/k, \eta_p(k) = \beta_p(k)/k \quad (29)$$

为分抗逼近电路的阶频与相频逼近效益, 对运算与逼近性能进行分析.

5 结果与分析

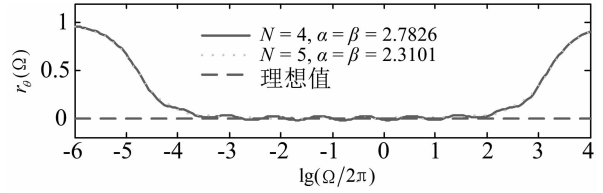
根据 Oustaloup 分抗有理逼近系统模型, 以逼近误差函数、逼近精度、逼近带宽指数、 K 指标、复杂度与逼近效益为评价标准, 对其运算性能进行分析.

图 5(a) 和 (b) 分别给出了给定频率范围内, Oustaloup 有理逼近的相频相对误差与阶频相对误差曲线 ($\mu = 1/2$). 可以看出, 在一定的频段范围内, Oustaloup 有理逼近的相频和阶频曲线逼近性能较好, 并且随着零极对数目增多, 逼近误差越小, 这是因为零极对数目增多, 极零比减小, 逼近误差减小, 波动幅度减小, $r_\mu(\Omega)$ 、 $r_\theta(\Omega)$ 都趋于零.

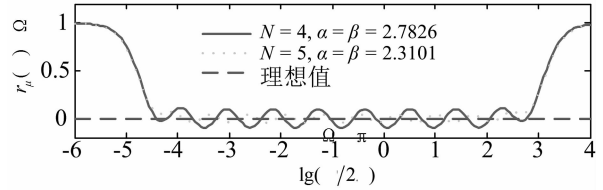
图 6 给出了一至四级精度指标下阶频、相频的逼近带宽指数曲线与 K 线斜率图 ($\mu = 1/2$, $\alpha = \beta = 2$). 可以看出, $\beta_{O_j}(k)$ 和 $\beta_{P_j}(k)$ 在一定范围内是逐渐增大的, 且不同精度指标的曲线趋于平行. Oustaloup 分抗有理逼近在满足 $\mu = 1/2$ 条件下, 随着 λ 的改变, K 指标随着 k 的增大趋于稳定并且约等于一固定值 $K = K_O = K_P = 0.6020 \approx \lg 4$, 且任何精度下得到的 K 指标的值基本相等, 因此

可以得出 K 指标与精度无关,这与理论值 $K = \lg\alpha + \lg\beta = \lg(aq\beta)$ 是一致的. 且电路的复杂性(元件数量)增加一倍,逼近带宽指数增加 $K = \lg 4 \approx 0.6020$,也就是说逼近带宽增加四个频率倍程. K 指标反映了逼近理想分抗的速度, K 指标越大,逼近带宽变化速率也就更快^[14],Oustaloup 分抗有理逼近能逼近任意阶的分抗,因此可以得出 Oustaloup 分抗有理逼近方法相对其他分抗如 Oldham^[25]链分抗是一种逼近速度较快的方法.

Oustaloup 有理逼近方法实现电路所需电容为 k 个,电阻为 k 个,在取定合适参数时,达到一级精度下的逼近只需 $k = 8$,而由自相似逼近方法构造出来的 Oldham 链分抗、树状分抗、回型分抗、H 型分抗和 X 型分抗虽然原理简单,但是系统复杂度高,达到相同精度下的逼近所需元件数目要几十甚至上千个,可以证实 Oustaloup 逼近法复杂度比较低.



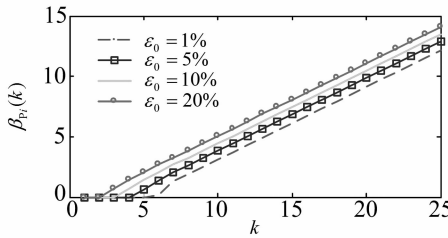
(a) 相频相对误差($\mu = 1/2$)
(a) Relative error of phase-frequency($\mu = 1/2$)



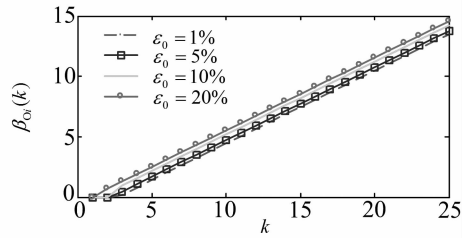
(b) 阶频相对误差($\mu = 1/2$)
(b) Relative error of order-frequency($\mu = 1/2$)

图 5 运算特征的相对误差曲线

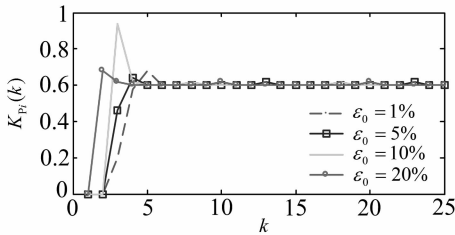
Fig. 5 Relative error curves of operational characteristics



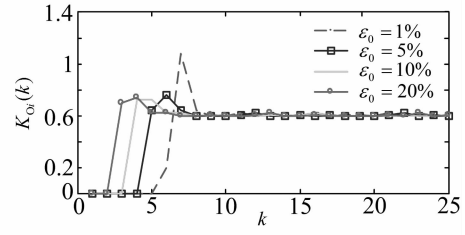
(a) 相频逼近带宽指数
(a) Phase-frequency Bandwidth Index



(b) 阶频逼近带宽指数
(b) Order-frequency Bandwidth Index



(c) 相频 K 指数
(c) Phase-frequency K -index



(d) 阶频 K 指数
(d) Order-frequency K -index

图 6 不同精度下 Oustaloup 分抗有理逼近的相频、阶频逼近带宽指数与 K 指标 ($\mu = 1/2$)

Fig. 6 Phase-frequency and order-frequency bandwidth index curves and K -index of Oustaloup fractance rational approximation with different accuracy

图 7 描述了阶频、相频的逼近效益,可以看出,阶数逐渐增大,电路的逼近效益逐渐增大,当电路阶数 $k \geq 10$ 时,逐渐变得平缓,此时电路逼近效益较好,这是由于 k 的增大会引起电路元件数目也即复杂度增大,Oustaloup 分抗有理逼近的阶次和逼近带宽都是线性增长的,逼近带宽与复杂度之比也逐渐趋于稳定.

6 结束语

从相频特征、阶频特征运算角度,本文探究了 Oustaloup 分抗有理逼近的影响因子与逼近效果.结果表明,阶频特征是全面考察运算特征的必要特征,在一定条件下,Oustaloup 有理逼近速度较快,逼近效果较好,且复杂度比较低.

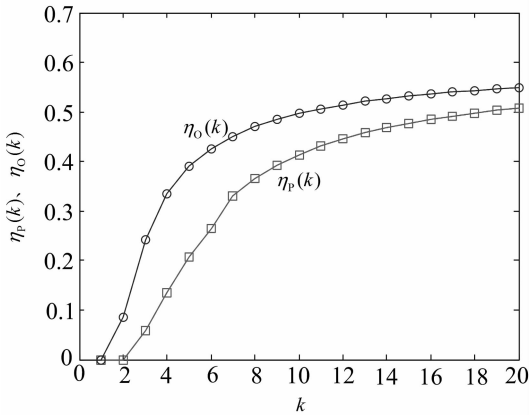


图 7 Oustaloup 分抗有理逼近的阶频和相频逼近效益
Fig. 7 Phase and Order frequency approximation effects curves of Oustaloup fractance rational approximation

虽然本文仅考察了负实零极对子系统及其组合系统,从零极对角度对分抗的系统进行分析,但这种分析方法完全可以推广应用于共轭零极组子系统及其组合系统的运算特征与逼近性能分析,提供了值得借鉴的研究范例。例如,对于 Chareff、Matsuda 等分抗有理逼近,容易从零极对的角度构造系统的有理近似传输函数,从阶频角度考察其运算特征与逼近性能,这一过程与我们的研究方法有异曲同工之妙!因此,本文研究不仅为理解 Oustaloup 有理逼近的本质提供了绝妙的数学理论基础,而且丰富和扩展了抗有理逼近的研究内容和范围,对分数阶控制系统研究和分数阶控制器实现有一定的现实意义。

对于 Oustaloup 分抗电路运算逼近性能的理论与方法研究,本文仅仅是个开始。诸如 Oustaloup 在近似理想值的频率两端处(图 1 和图 5 可看出两端逼近效果不理想)的优化问题,Oustaloup 分抗的实际电路构造问题,这些对于工程应用是至关重要的课题,值得进一步考察与深入研究。

参考文献:

[1] Lamara A, Lanusse P, Charlet A, *et al.* High dynamic engine-dynamometer identification and control [C] // Proceedings of the 19th IFAC World Congress. Cupe Town, South Africa: IFAC, 2014.

[2] Raynaud H F, Zergaimoh A. State-space representation for fractional order controller[J]. *Automatica*, 2000, 36(7): 1017.

[3] 赵元英, 袁晓, 滕旭东, 等. 常用周期信号的分数微分运算[J]. *四川大学学报:工程科学版*, 2004,

36(2): 94.

[4] 袁晓, 陈向东, 李齐良, 等. 微分算子与子波构造[J]. *电子学报*, 2002, 30(5): 769.

[5] 袁晓, 张红雨, 虞厥邦. 分数导数与数字微分器设计[J]. *电子学报*, 2004, 32(10): 1658.

[6] 滕旭东, 袁晓, 赵元英, 等. 数字分数微分器系数的快速算法[J]. *电子科技大学学报*, 2004, 33(4): 457.

[7] 张玉, 王正勇, 滕奇志, 等. 自适应分数阶微分的图像增强及应用[J]. *四川大学学报:自然科学版*, 2015, 52(1): 93.

[8] Podlubny I, Petras I, Vinagre B M, *et al.* Analogue realizations of fractional-order controllers[J]. *Nonlinear Dynam*, 2002, 29(1-4): 281.

[9] Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, *et al.* Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis[J]. *IEEE Trans Circuits Syst I Fundam Theory Appl*, 2000, 47(1): 25.

[10] Lanusse P, Oustaloup A, Pommier-Budinger V. Stability of closed loop fractional order systems and definition of damping contours for the design of controllers [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2012, 22(04): 537.

[11] Oustaloup A, Mathieu B. *La commande CRONE* [M]. Paris: Hermes science publications, 1999.

[12] Ortigueira M D. An introduction to the fractional continuous-time linear systems: the 21st century systems [J]. *IEEE Circuits Syst Mag*, 2008, 8(3): 19.

[13] Elwakil A S. Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area [J]. *IEEE Circuits Syst Mag*, 2010, 10(4): 40.

[14] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理[M]. 北京:科学出版社, 2015.

[15] Pu Y F, Zhou J L, Yuan X. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement [J]. *IEEE Trans Image Process*, 2010, 19(2): 491.

[16] 邹道, 袁晓, 陶崇强, 等. 任意阶分抗的 Padé 有理逼近法[J]. *四川大学学报:自然科学版*, 2013, 50(2): 293.

[17] Matsuda K, Fujii H. H (infinity) optimized wave-absorbing control-analytical and experimental results [J]. *J Guid Control Dynam*, 1993, 16(6): 1146.

[18] Carlson G E, Halijak C A. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process[J]. *IEEE Trans Circuit Theory*, 1964, 11

- (2): 210.
- [19] Charef A, Sun H H, Tsao Y Y, *et al.* Fractal system as represented by singularity function[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1992, 37(9): 1465.
- [20] Xue D Y, Zhao C, Chen Y Q. A modified approximation method of fractional order system[C]// Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Henan, China: IEEE, 2006.
- [21] 齐乃明, 秦昌茂, 王威. 分数阶系统的最优 Oustaloup 数字实现算法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1598.
- [22] Venkitaraman A, Seelamantula C S. Fractional hilbert transform extensions and associated analytic signal construction [J]. Signal Process, 2014, 94: 359.
- [23] 魏永豪, 袁晓, 滕旭东, 等. 广义希尔伯特变换及其数字实现[J]. 电子科技大学学报, 2005, 32(2): 175.
- [24] 魏永豪, 袁晓, 滕旭东, 等. 基于分数希尔伯特变换的广义解析信号[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2005, 42(1): 77.
- [25] Oldham K B. Semiintegral electroanalysis: analog implementation[J]. Anal Chem, 1973, 45(1): 39.