

doi: 103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 03. 010

# 基于脉冲微分方程的移动自组网病毒传播免疫模型

曹玉林<sup>1,2</sup>, 马建萍<sup>3</sup>, 赵焱鑫<sup>1</sup>

(1. 陕西师范大学计算机科学学院, 西安 710062; 2. 青海师范大学计算机学院, 西宁 810008;  
3. 青海师范大学数学系, 西宁 810008)

**摘要:** 在移动自组网(MANETs)领域,节点的移动特性导致网络拓扑结构动态变化,安全补丁无法在网络中快速传播,从而没有对移动自组网脉冲免疫下的病毒传播进行研究. 对此考虑到 MANETs 脉冲免疫的现实可行性,建立 MANETs 病毒传播脉冲免疫模型. 基于脉冲微分方程(Impulsive Differential Equations, IDE)稳定性理论分析脉冲免疫下的 MANETs 的病毒传播行为和病毒是否消亡的感染临界特性,并对该系统的无病(Disease-free, DF)周期解的存在性、稳定性以及地方病(Endemic, ED)的持续存在性加以分析. 并选取相应的参数,对系统进行数值仿真,实验结果验证了所得结论的正确性与一致性.

**关键词:** 移动自组网; 脉冲微分方程; 病毒传播; 免疫模型; 系统稳定性

**中图分类号:** TP393.01      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0490-6756(2016)02-0295-10

## Mobile ad-hoc network virus propagation immunization model based on impulsive differential equations

CAO Yu-Lin<sup>1,2</sup>, MA Jian-Ping<sup>3</sup>, ZHAO Yan-Xin<sup>1</sup>

(1. School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China;  
2. School of Computer Science, Qinghai Normal University, Xi'ning 810008, China;  
3. Department of Mathematics, Qinghai Normal University, Xi'ning 810008, China)

**Abstract:** In Mobile ad-hoc network (MANETs) field, with the moving characteristic of nodes leading to the dynamic change in network topology, security patches can't rapidly spread in the network, thus not to study the virus propagation immunizing to the Mobile ad-hoc network pulse. Considering the realistic feasibility of MANETs pulse immunization, MANETs virus transmission pulse immunization model was established. Based on the Impulsive Differential equation (Impulsive Differential Equations, IDE) stability theory, the MANETs virus propagation behavior under pulsed immune and the critical characteristics of infection denoting whether viruses die out were analyzed, as well as the existence, stability of the system periodic solution of disease-free (diseases - free, DF), and the persistent existence of the Endemic diseases(Endemic, ED). With corresponding parameters selected, the numerical simulation was carried out upon the system, the experimental results of which validate the correctness and consistency of the conclusion.

**Key words:** Mobile ad-hoc network; Impulsive differential equations; The spread of the virus; Immune model; System stability

收稿日期: 2015-05-20

基金项目: 国家自然科学基金(61373083, 61363080)

作者简介: 曹玉林(1970-), 男, 青海化隆人, 教授, 研究方向为无线传感器网络、网络信息安全. E-mail: caoyulin@126.com.

通讯作者: 马建萍. E-mail: majianping@126.com.

# 1 引言

随着移动自组网(Mobile Ad Hoc Networks, MANETs)研究的快速发展,网络上的病毒传播问题成为研究机会网络、社会网络等的一个重要组成部分,使网络安全问题日益显现出来<sup>[1-2]</sup>. 在 Internet 互联网等具有静态拓扑结构的网络中,新的安全补丁可以在网络中快速传播,并且在安装后立即生效,从而导致网络中的大量感染节点被瞬间治愈<sup>[3-4]</sup>. 因此,研究人员根据这种现象,对复杂网络等传统静态拓扑结构网络的脉冲免疫下的病毒传播行为进行了大量的研究<sup>[5-6]</sup>. 但是,由于大多数研究都认为 MANETs 节点持续移动,拓扑结构动态变化,将导致安全补丁无法在网络中快速传播,从而没有考虑对移动自组网脉冲免疫下的病毒传播研究,这显然存在局限性. 然而,不可否认的是,MANETs 的安全补丁可以通过基站或者中心节点以广播形式在网络中进行传播,从而能够在同一时间对网络中大量感染节点进行治愈. 因此,有必要深入探讨脉冲免疫下的 MANETs 病毒传播行为.

# 2 病毒传播模型

## 2.1 问题描述

将 MANETs 节点部署的空间区域抽象为一个  $L \times L$  二维平面  $\Omega$ . 假设网络共有  $N$  个节点,随机均匀分布在平面  $\Omega$  上,所有节点均以相同的速度  $v$  在平面  $\Omega$  上做随机运动,节点通信半径为  $r$ ,不考虑通信距离对通信损耗等造成的影响,将节点视为一样的.

假设网络中的节点共有三种状态: S、I 和 R 状

态,对应的三种状态节点数量用  $S(t)$ 、 $I(t)$  和  $R(t)$  表示. 显然,  $\forall t \geq 0$ , 均有  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ . 由于认为节点保持均匀分布且不同状态节点混合均匀,在任意一个单位时间内,任意一个节点扫过面积大小为  $(\pi r^2 + 2rv)$ . 根据区域  $\Omega$  上节点平均密度以及在第  $t$  个单位时间易感节点的数量,可知在第  $t$  个单位时间内每个易感节点 S 遇到感染节点 I 的个数为  $N_i(t) = (\pi r^2 + 2rv)I(t)/L^2$ <sup>[7-8]</sup>, 每个 S 节点转换成 I 节点的概率为  $\epsilon(t) = (\pi r^2 + 2rv)\beta I(t)/L^2$ .

## 2.2 构建免疫模型

在病毒的传播过程中,每个单位时间内,由于节点电量的消耗或者发生故障将有  $\delta$  比率的节点退出网络,也有同样比率的节点被补充到网络中来. 每个 S 节点每碰到一个 I 节点时,将以感染率  $\beta$  转换成 I 节点<sup>[9-10]</sup>; 而由于安全机制的作用,每个 I 节点将以恢复率  $\gamma$  转换成 S 节点或者以免疫率  $\alpha$  转换成 R 节点. 由于安全机制的失效,每个 R 节点将以  $\eta$  比率转变为 S 节点,同时因及时更新安全补丁,在第  $nT$  时刻将有  $\theta_1$  (或者  $\theta_2$ ) 比例的 S (或者 I) 节点转换成免疫状态,其中  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T > 0$ . 其转换关系如图 1 所示.

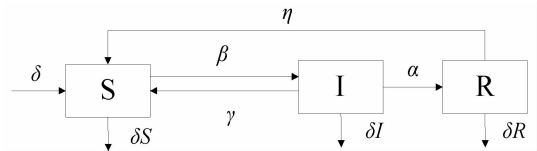


图 1 SIRS 病毒转换关系

Fig. 1 Transfer relationships of node states in SIRS

依据节点状态之间的转变关系,构建的 MANETs 病毒传播行为. MANETS 病毒传播脉冲免疫模型如下.

$$\left. \begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \delta - \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} S(t)I(t) + \gamma I(t) + \eta R(t) - \delta S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} S(t)I(t) - \gamma I(t) - (\alpha + \delta)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \alpha I(t) - (\eta + \delta)R(t), \end{cases} \right\} t \neq nT \tag{1}$$

$$\left. \begin{cases} S(t^+) = (1 - \theta_1)S(t), \\ I(t^+) = (1 - \theta_2)I(t), \\ R(t^+) = R(t) + \theta_1 S(t) + \theta_2 I(t), \end{cases} \right\} t = nT$$

初始状态  $(S(0^+), I(0^+), R(0^+)) \in \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S + I + R = 1\}$ , 其中  $\delta, \beta, \gamma, \alpha, \eta, \theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ ,  $\theta_2 \geq \theta_1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, T > 0$ .

根据  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ , 系统(1)可简化为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2}(1 - I(t) - R(t))I(t) - (\gamma + \alpha + \delta)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \alpha I(t) - (\eta + \delta)R(t), \\ I(t^+) &= (1 - \theta_2)I(t), \\ R(t^+) &= (1 - \theta_1)R(t) + (\theta_2 - \theta_1)I(t) + \theta_1, \end{aligned} \right. \left. \begin{array}{l} t \neq nT \\ \\ \\ t \neq nT \end{array} \right\} \quad (2)$$

其中,  $(I(0^+), R(0^+)) \in \{(I, R) \in \mathbb{R}^2 : I + R \leq 1\}$ .

### 3 系统稳定性分析

#### 3.1 无病周期解的存在性

**定理 1** 系统(2)有且只有唯一的 DF 周期解  $(0, \underline{R}(t))$ .

**证明** 假设存在一个 DF 周期解  $(0, \underline{R}(t))$ , 代入(2)式可得

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= -(\eta + \delta)R(t), \quad t \neq nT \\ R(t^+) &= (1 - \theta_1)R(t) + \theta_1, \quad t = nT \end{aligned} \right. \quad (3)$$

由(3)式可得  $R(t) = R(nT^+)e^{-(\eta+\delta)(t-nT)}$ , 其中,  $nT < t < (n+1)T$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , 假设  $R_n = R(nT^+)e^{-(\eta+\delta)(t-nT)}$ , 易得映射函数  $F$  满足  $R_{n+1} = F(R_n) = (1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T}R_n + \theta_1$ .

显然, 映射函数  $F$  有一个唯一固定点  $R_* = \theta_1 / (1 - (1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T})$ , 且可知

$$\begin{aligned} R_n - R_* &= (1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T}(R_{n-1} - R_*) = \dots \\ &= [(1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T}]^n(R_0 - R_*) \end{aligned} \quad (4)$$

因而, 由(4)式可知, 系统(2)存在一个周期解  $(0, \underline{R}(t))$ , 其中

$$\underline{R}(t) = \frac{\theta_1 e^{-(\eta+\delta)(t-nT)}}{1 - (1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T}}, \quad nT < t < (n+1)T, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

由于映射函数  $F$  有一个唯一固定点  $R_* = \theta_1 / (1 - (1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T})$ , 这说明系统(3)有唯一的 DF 周期解  $(0, \underline{R}(t))$ .

由于  $R_n - R_* = (1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T}(R_{n-1} - R_*) = \dots = [(1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T}]^n(R_0 - R_*)$ . 而  $R_*$  是映射函数  $F$  所决定系统  $R_{n+1} = F(R_n)$  GAS 点, 所以  $\underline{R}(t)$  具有 GAS 性. 由此得证, 并得如下推论.

**推论 1** 系统(1)有且只有唯一的 DF 周期解  $(\underline{S}(t), 0, \underline{R}(t))$ , 其中  $\underline{S}(t) = 1 - \underline{R}(t)$ .

#### 3.2 无病周期解的稳定性

**定理 2** 系统(2)的 DF 周期解  $(0, \underline{R}(t))$  是 LAS 的, 当且仅当  $R_0 < 1$ ; 系统(2)的 DF 周期解  $(0, \underline{R}(t))$  是不稳定的, 当且仅当  $R_0 > 1$ .

**证明** 首先证明系统(2)的 DF 周期解是 GAS 的, 为此, 令

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta \int_0^T \underline{S}(t) dt}{(\gamma + \alpha + \delta)T + \ln \frac{1}{1 - \theta_2}} = \\ &= \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta T}{L^2} - \frac{\beta \theta_1}{\eta + \delta} \frac{1 - e^{-(\eta+\delta)T}}{1 - (1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T}} \\ &\quad \frac{1}{(\gamma + \alpha + \delta)T + \ln \frac{1}{1 - \theta_2}} \end{aligned} \quad (5)$$

将系统(2)在  $(0, \underline{R}(t))$  点处, 经过线性化后得到

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \left( \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} S(t) - \gamma - \alpha - \delta \right) v(t), \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \alpha v(t) - (\eta + \delta)w(t), \\ v(t^+) &= (1 - \theta_2)v(t), \\ w(t^+) &= (1 - \theta_1)w(t) + (\theta_2 - \theta_1)v(t), \end{aligned} \right. \left. \begin{array}{l} t \neq nT \\ \\ \\ t \neq nT \end{array} \right\} \quad (6)$$

设  $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} \underline{S}(t) - \gamma - \alpha - \delta & 0 \\ \alpha & -(\eta + \delta) \end{pmatrix}$ ,  $B(t) = \begin{pmatrix} 1 - \theta_2 & 0 \\ \theta_2 - \theta_1 & 1 - \theta_1 \end{pmatrix}$

易得

$$\Phi(t) = e^{\int_0^t A(s) ds} = \begin{pmatrix} e^{\frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} \int_0^t \underline{S}(s) ds - (\gamma + \alpha + \delta)t} & 0 \\ * & e^{-(\eta + \delta)t} \end{pmatrix},$$

由此得(6)式的单值矩阵:

$$M = B\Phi(t) = \begin{pmatrix} (1 - \theta_2)e^{\frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} \int_0^T \underline{S}(s) ds - (\gamma + \alpha + \delta)T} & 0 \\ * & (1 - \theta_1)e^{-(\eta + \delta)T} \end{pmatrix} \quad (7)$$

由矩阵  $M$  可得其特征值:

$$\lambda_1 = (1 - \theta_1)e^{-(\eta + \delta)T} < 1 \text{ 和 } \lambda_2 = (1 - \theta_2)e^{\frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} \int_0^T \underline{S}(s) ds - (\gamma + \alpha + \delta)T}.$$

根据弗洛凯定理<sup>[11]</sup>可推出当  $\lambda_2 < 1$  时,即  $R_0 < 1$  时,系统(2)在 DF 周期解  $(0, \underline{R}(t))$  处是 LAS 的;当  $\lambda_2 > 1$  时,即  $R_0 > 1$  时,系统(2)在 DF 周期解  $(0, \underline{R}(t))$  处不稳定.

**推论 2** 系统(1)的 DF 周期解  $(\underline{S}(t), 0, \underline{R}(t))$  是 LAS 的,当且仅当  $R_0 < 1$ ;系统(1)的 DF 周期解  $(\underline{S}(t), 0, \underline{R}(t))$  是不稳定的,当且仅当  $R_0 > 1$ .

由上述定理和推论已知 DF 周期解具有 LAS 性,下面讨论其 GAS 性.

已知当  $R_0 < 1$  系统具有 LAS 性,即

$$(1 - \theta_2)e^{\frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} \int_0^T \underline{S}(s) ds - (\gamma + \alpha + \delta)T} < 1,$$

设定一个足够小的  $\tau > 0$ ,使得

$$\sigma = (1 - \theta_2)e^{\frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} \int_0^T (\underline{S}(s) + \tau) ds - (\gamma + \alpha + \delta)T} < 1.$$

假设  $(I(t), R(t))$  是系统(2)任意解.由定理 2 可知  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ ,且  $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \underline{R}(t)$ .

根据系统(2),可得

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} \geq -(\eta + \delta)R(t), & t \neq nT \\ R(t^+) \geq (1 - \theta_1)R(t) + \theta_1, & t = nT \end{cases} \quad (8)$$

考虑如下对比系统

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -(\eta + \delta)x(t), & t \neq nT \\ x(t^+) = (1 - \theta_1)x(t) + \theta_1, & t = nT \end{cases} \quad (9)$$

其初始状态  $x(0^+) = R(0^+)$ ,易知该系统存在一个 GAS 的周期解  $\underline{x}(t) = \underline{R}(t)$ . 根据 IDE 的对比定理<sup>[12]</sup>可知,存在一个脉冲周期  $T_1$ ,使得对于所有  $t \geq T_1$ ,满足  $R(t) \geq x(t) > \underline{R}(t) - \tau$ ,结合(2)式,可得

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} \leq \left[ \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} (\underline{S}(t) + \tau) - (\gamma + \alpha + \delta) \right] I(t), & t \geq T_1, \text{ 且 } T \neq nT \\ I(t^+) = (1 - \theta_2)I(t), & t \geq T_1, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (10)$$

假设  $N_1 = \left\lceil \frac{T_1}{T} \right\rceil$ ,考虑如下等价系统

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} \leq \left[ \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} (\underline{S}(t) + \tau) - (\gamma + \alpha + \delta) \right] y, & t \geq T_1, \text{ 且 } T \neq nT \\ y(t^+) = (1 - \theta_2)y(t), & t \geq T_1, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (11)$$

其初始状态  $y(N_1 T^+) = I(N_1 T^+)$ ,则易知  $y(nT^+) = I(N_1 T^+) \sigma^{n-N_1}$  对所有  $n \geq N_1$  均成立,即  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(nT^+) = 0$ . 即,如果  $n \geq N_1, nT < t \leq (n+1)T$ ,则有

$$y(t) = y(nT^+) e^{\int_{nT}^t [\beta(\underline{S}(s) + \tau) - \gamma - \alpha - \delta - \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1 - \theta_2}] ds} \leq I(N_1 T^+) e^{\beta(1+\tau)T} \sigma^{n-N_1} \quad (12)$$

这意味着  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ . 根据 IDE 的对比定理<sup>[12]</sup>可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ . 因此,存在  $T_2 > T_1$  使得对于任意  $t \geq T_2, I(t) < \tau$ . 将其代入(2)式,可得

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} \leq \alpha\tau - (\eta + \delta)R(t), \\ t \geq T_2, \text{ 且 } T \neq nT \\ R(t^+) = (1 - \theta_1)R(t) + (\theta_2 - \theta_1)\tau + \theta_1, \\ t \geq T_2, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (13)$$

假设  $N_2 = \left\lceil \frac{T_2}{T} \right\rceil$  并考虑如下对比系统

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} \leq \alpha\tau - (\eta + \delta)z, \\ t \geq T_2, \text{ 且 } T \neq nT \\ z(t^+) = (1 - \theta_1)z(t) + (\theta_2 - \theta_1)\tau + \theta_1, \\ t \geq T_2, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (14)$$

其初始状态  $z(N_2 T^+) = R(N_2 T^+)$ . 显然该系统存在一个 GAS 的周期解:

$$\underline{z}(t) = \frac{\alpha\tau}{\eta + \delta} + (z_* - \frac{\alpha\tau}{\eta + \delta}) e^{-(\eta + \delta)(t - nT)}, \text{ 其中 } nT < t \leq (n+1)T, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$z_* =$$

$$\frac{(\theta_2 - \theta_1)\tau + \theta_1 + \frac{\alpha(1 - \theta_1)\tau}{\eta + \delta}(1 - e^{-(\eta+\delta)T})}{1 - (1 - \theta_1)e^{-(\eta+\delta)T}} \quad (15)$$

根据对比定理<sup>[13,14]</sup>, 存在  $T_3 > T_2$  使得  $R(t) \leq z(t) < \underline{z}(t) + \tau, t \geq T_3$ . 因此, 根据  $\tau$  的任意性, 以及  $\lim_{t \rightarrow 0^+} z(t) = \underline{R}(t)$ , 可以得到  $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \underline{R}(t)$ .

由上述推导, 可得如下定理和推论.

**定理 3** 系统(2)的 DF 周期解  $(0, \underline{R}(t))$  是 GAS 的, 当且仅当  $R_0 < 1$ .

**推论 3** 系统(1)的 DF 周期解  $(\underline{S}(t), 0, \underline{R}$

$(t))$  是 GAS 的, 当且仅当  $R_0 < 1$ .

### 3.3 地方病的持续存在性

ED 的持续存在性: 存在一个  $m > 0, T_* > 0$ , 对于系统(2)的任意解  $(I(t), R(t))$ , 当  $I(0^+) > 0$  时, 对于任意  $t > T_*$ ,  $I(t) \geq m$ . 现证明 ED 持续存在的条件, 并得如下定理.

**定理 4** 系统(2)的 ED 是持续存在的, 当且仅当  $R_0 > 1$ .

**证明** 由  $R_0 > 1$ , 可选择足够小的  $m_1 > 0$  和  $\kappa_1 > 0$  使得

$$\Delta = (1 - \theta_2)e^{\left[\frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2}(1 - m_1 - \kappa_1 - \frac{\alpha m_1}{\eta + \delta}) - (\gamma + \alpha + \delta)\right]T - \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{(\eta + \delta)L^2}(u_* - \frac{\alpha m_1}{\eta + \delta})[1 - e^{-(\eta + \delta)T}]} > 1 \quad (16)$$

其中,

$$u_* = \frac{(\theta_2 - \theta_1)m_1 + \theta_1 + \frac{\alpha(1 - \theta_1)m_1}{\eta + \delta}[1 - e^{-(\eta + \delta)T}]}{1 - (1 - \theta_1)e^{-(\eta + \delta)T}} \quad (17)$$

令

$$n_2 = \left\lceil \frac{\ln \frac{1 + u_*}{\kappa_1}}{(\eta + \delta)T} \right\rceil + 1 \quad (18)$$

$$n_3 = \left\lceil \frac{(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2}\beta m_1 + \gamma + \alpha + \delta)n_2 T + n_2 \ln \frac{1}{1 - \theta_2}}{\ln \Delta} \right\rceil + 1 \quad (19)$$

$$m_2 = m_1(1 - \theta_2)^{n_2 + n_3} e^{-(n_2 + n_3)(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2}\beta m_1 + \gamma + \alpha + \delta)T} \quad (20)$$

$$m_3 = m_1(1 - \theta_2)^{n_2 + n_3 + 1} e^{-(n_2 + n_3 + 1)(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2}\beta m_1 + \gamma + \alpha + \delta)T} \quad (21)$$

**引理 1** 系统(2)的任意解  $(I(t), R(t))$ , 当  $I(0^+) > 0$  时, 存在  $t > 0$ , 使得  $I(t) \geq m_1$ .

**证明** 用反证法, 假设对于任意  $t > 0$ , 都有  $I(t) < m_1$ . 则有

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} \leq \alpha m_1 - (\eta + \delta)R(t), & T \neq nT \\ R(t^+) \leq (1 - \theta_1)R(t) + (\theta_2 - \theta_1)m_1 + \theta_1, \\ T = nT \end{cases} \quad (22)$$

考虑如下对比系统

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \alpha m_1 - (\eta + \delta)u(t), & T \neq nT \\ u(t^+) \leq (1 - \theta_1)u(t) + (\theta_2 - \theta_1)m_1 + \theta_1, \\ T = nT \end{cases} \quad (23)$$

其初始状态  $u(0^+) = R(0^+)$ . 已知此系统存在一个 GAS 周期解:  $\underline{u}(t) = \frac{\alpha m_1}{\eta + \delta} + (u_* - \frac{\alpha m_1}{\eta + \delta})e^{-(\eta + \delta)(t - nT)}$ , 其中  $nT < t \leq (n + 1)T, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

由对比定理, 可知存在一个  $\underline{T} > 0$ , 使得当  $t \geq \underline{T}, R(t) \leq u(t) < \underline{u}(t) + \kappa_1$ . 将其代入(2)式, 得

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} \geq \left[\frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2}(1 - m_1 - \underline{u}(t) - \kappa_1) - \gamma - \alpha - \delta\right]I(t), & t \geq \underline{T}, \text{ 且 } T \neq nT \\ I(t^+) = (1 - \theta_2)I(t), & t \geq \underline{T}, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (24)$$

假设  $\underline{N} = \left\lceil \frac{\underline{T}}{T} \right\rceil$ , 将第一个式子代入系统方程

中, 并将  $I(nT^+) = (1 - \theta_2)I(nT)$  代入结果方程式中, 可得

$$I((n + 1)T) \geq (1 - \theta_2)I(nT) e^{\int_{nT}^{(n+1)T} \left[\frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2}(1 - m_1 - \underline{u}(t) - \kappa_1) - \gamma - \alpha - \delta\right] dt} = I(nT) \Delta \quad (25)$$

因此, 对于任意  $n \geq \underline{N}, I(nT) \geq I(\underline{N}T) \Delta^{n - \underline{N}}$  均

成立. 由于  $I(\underline{NT}) > 0$ , 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(nT) = +\infty$ , 这与  $I(t) \leq 1$  矛盾. 因此, 假设不成立, 结论成立.

我们设  $I(T_0) \geq m_1$ , 如果对于任意  $t \geq T_0, I(t) \geq m_1$ , 此假设显然成立. 因此, 假设存在  $t \geq T_0$ , 满足  $I(t) < m_1$ . 设  $T_1 = \inf_{t > T_0} \{t: I(t) < m_1\}$ , 此时, 存在两种情况.

**情况 1** 若  $T | T_1$ , 则对于  $t \in [T_0, T_1]$ , 均有  $I(t) \geq m_1$ , 且  $I(T_1^+) = (1 - \theta_2)I(T_1) < m_1$ . 假设  $T_1 = n_1 T$ , 并设  $T_2 = (n_1 + n_2) T, T_3 = (n_1 + n_2 + n_3) T$ .

**引理 2** 存在  $t \in (T_1, T_3]$ , 满足  $I(t) \geq m_1$ .

**证明** 用反证法, 假设对于任意  $T_1 < t \leq T_3$ , 均有  $I(t) < m_1$ . 则有

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} \leq \alpha m_1 - (\gamma + \delta)R(t), \\ T_1 < t < T_3, \text{ 且 } T \neq nT \\ R(t^+) \leq (1 - \theta_1)R(t) + (\theta_2 - \theta_1)m_1 + \theta_1, \\ T_1 < t \leq T_3, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (26)$$

同样地, 考虑如下对比系统

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \alpha m_1 - (\gamma + \delta)u(t), \\ T_1 < t < T_3, \text{ 且 } T \neq nT \\ u(t^+) = (1 - \theta_1)u(t) + (\theta_2 - \theta_1)m_1 + \theta_1, \\ T_1 < t \leq T_3, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (27)$$

其初始值  $u(T_1^+) = R(T_1^+)$ . 通过求解上述系统, 可得  $u(t) = \underline{u}(t) + [R(T_1^+) - u_*]e^{-(\gamma+\delta)(t-T_1)}$ , 其中,  $T_1 < t \leq T_3$ . 所以, 可得

$|u(t) - \underline{u}(t)| < (1 + u_*)e^{-(\gamma+\delta)(t-T_1)} < \kappa_1$ , 其中,  $T_1 < t \leq T_3$ . 根据对比定理和  $n_2, n_3$  的定义, 可得  $R(t) \leq u(t) < \underline{u}(t) + \kappa_1, T_2 \leq t \leq T_3$ . 因此, 得到

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} \geq \left[ \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} (1 - m_1 - \underline{u}(t) - \kappa_1) - \gamma - \alpha - \delta \right] I(t), \\ T_2 < t < T_3, \text{ 且 } T \neq nT \\ I(t^+) = (1 - \theta_2)I(t), T_2 \leq t \leq T_3, \\ \text{且 } T = nT \end{cases} \quad (28)$$

同理可得,

$$I(T_3) \geq I(T_2) \Delta^{n_3} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} \geq \\ - \left( \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} m_1 + \gamma + \alpha + \delta \right) I(t), \\ T_1 < t < T_2, \text{ 且 } T \neq nT \\ I(t^+) = (1 - \theta_2)I(t), \\ T_1 \leq t \leq T_2, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (30)$$

重复上述方法, 由  $I(T_1) \geq m_1$ , 可得  $I(T_2) \geq$

$$m_1 (1 - \theta_2)^{n_2} e^{-\left(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2} m_1 + \gamma + \alpha + \delta\right) n_2 T} \quad (31)$$

根据(29)和(31)式, 得到

$$I(T_3) \geq m_1 (1 - \theta_2)^{n_2} e^{-\left(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2} m_1 + \gamma + \alpha + \delta\right) n_2 T} \Delta^{n_3} > m_1 \quad (32)$$

这与假设矛盾, 因而得证.

设  $\bar{T} = \inf_{t > T_1} \{t: I(t) \geq m_1\}$ , 则  $I(\bar{T}) = m_1$ , 并且对于  $t \in (T_1, \bar{T}]$  始终满足  $I(t) < m_1$ .

**引理 3**  $I(t) \geq m_2$  对于所有  $t \in (T_1, \bar{T}]$  均成立.

**证明** 对于任意  $t \in (T_1, \bar{T}]$ , 设  $t \in (kT, (k+1)T], n_1 \leq k \leq n_1 + n_2 + n$

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} \geq \\ - \left( \frac{(\pi r^2 + 2rv)\beta}{L^2} m_1 + \gamma + \alpha + \delta \right) I(t), \\ T_1 < t < \bar{T}, \text{ 且 } T \neq nT \\ I(t^+) = (1 - \theta_2)I(t), \\ T_1 < t < \bar{T}, \text{ 且 } T = nT \end{cases} \quad (33)$$

同理可得, 对于  $t \in (T_1, \bar{T}]$ ,

$$\begin{aligned} I(t) &\geq I(T_1^+) (1 - \theta_2)^{k-n_1} \\ &e^{-(k-n_1)\left(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2} m_1 + \gamma + \alpha + \delta\right) T} \times \\ &e^{-\left(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2} m_1 + \gamma + \alpha + \delta\right)(t-kT)} \geq m_1 (1 - \theta_2)^{k-n_1} \\ &e^{-(k-n_1+1)\left(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2} m_1 + \gamma + \alpha + \delta\right) T} \geq \\ &m_1 (1 - \theta_2)^{n_2+n_3} e^{-(n_2+n_3)\left(\frac{\pi r^2 + 2rv}{L^2} m_1 + \gamma + \alpha + \delta\right) T} = m_2 \end{aligned}$$

证毕.

同理由引理 2 和引理 3 的方法, 可得引理 4~6 及引理 8, 由引理 5 和引理 6 的方法, 可得引理 7.

**引理 4**  $I(t) \geq m_2$  对于所有  $t > T_1$  均成立.

**情况 2**  $T \neq nT$ . 则对于任意  $t \in [T_0, T_1], I(t) \geq m_1$ , 且  $I(T_1^+) = m_1$ . 假设  $T_1 \in (n_1 T, (n_1 + 1) T)$ , 我们将分两种子情况进行讨论.

**情况 2.1** 对于任意  $t \in (T_1, (n_1 + 1) T], I(t) < m_1$ .

**引理 5** 存在  $t \in ((n_1 + 1) T, (n_1 + n_2 + n_3 + 1) T]$ , 使得  $I(t) \geq m_1$  成立.

假设  $\hat{T} = \inf_{t > (n_1+1)T} \{t: I(t) \geq m_1\}$ , 则对于任意  $t \in ((n_1 + 1) T, \hat{T}), I(t) < m_1$ , 且  $I(\hat{T}) = I(\hat{T}^+) = m_1$ .

**引理 6**  $I(t) \geq m_3$  对于所有  $t \in (T_1, \hat{T})$  均成立.

**引理 7**  $I(t) \geq m_3$  对于所有  $t > T_1$  均成立.

**情况 2.2** 存在  $t \in (T_1, (n_1 + 1) T]$ , 使得  $I(t) \geq m_1$ . 我们设  $\tilde{T} = \inf_{t > T_1} \{t: I(t) \geq m_1\}$ . 则易得, 对于

任意  $t \in (T_1, \tilde{T})$ ,  $I(t) < m_1$ , 且  $I(\tilde{T}) = I(\tilde{T}^+) = m_1$ .

**引理 8**  $I(t) \geq m_3$  对于所有  $t \in (T_1, \tilde{T})$  均成立.

综合上述讨论, 可知, 对于任意的  $t > T_1$ ,  $I(t) \geq \min\{m_2, m_3\}$ , 证毕.

根据定理 4 易得出如下结论:

**推论 4** 系统(1)的 ED 将持续存在, 当且仅当  $R_0 > 1$ .

### 4 仿真实验与分析

通过分析所提出的脉冲微分方程系统平衡解的存在性和稳定性, 得到了决定病毒持续传播或消亡的阈值. 这为阻止病毒传播提供了实时性的决策参考<sup>[15,16]</sup>. 上述理论已经表明脉冲免疫下 MANETs 中病毒传播阈值与基本重生数  $R_0$  有关. 当  $R_0 < 1$  时, 网络最终稳定后的感染节点会消失, 系统最终 GAS 在 DF 周期解; 当  $R_0 > 1$  时, 网络稳定后保持一定感染比例, 系统 ED 将持续存在. 为了验证上述结论, 将在以下四个方面进行数值仿真, 并验证结论的正确性, 实验参数设置  $L = 10$ , 节点补充率  $\delta = 0.05$ , 感染率  $\beta = 0.9$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\eta = 0.5$ ,  $S(0) = 0.5$ ,  $I(0) = 0.5$ , 移动速度  $v$ ,  $\theta_1 = 0.1$ ,  $\theta_2 = 0.1$ , 通信半径  $r = 2$ , 脉冲周期  $T = 2$ .

#### 4.1 移动速度 $v$ 对传播的影响

取  $\theta_1 = 0.1$ ,  $\theta_2 = 0.1$ , 通信半径  $r = 2$ , 脉冲周期  $T = 2$ , 得到基本重生数  $R_0$  与节点移动速度  $v$  之间的关系如图 2 所示, 此时  $R_0$  是关于  $v$  的一次线性函数, 且在区间  $(0, +\infty)$  单调递增. 当  $v_c = 18.55$  时,  $R_0 = 1$ , 可知移动速度阈值  $v_c = 18.55$ . 因此, 当  $v < v_c$  时, 由定理 2 可知, 系统 GAS 在 DF 周期解. 反之, 当  $v > v_c$  时, 系统 ED 将持续存在. 因此, 分别取  $v = 5, 16, 23, 30$  进行实验得到三种状态节点数量随时间变化曲线, 如图 3 所示.

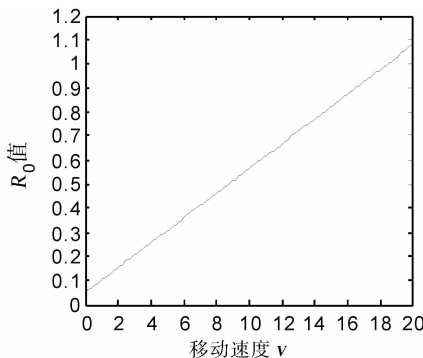


图 2 移动速度  $v$  和  $R_0$  关系

Fig. 2 The relationship between  $R_0$  &  $v$

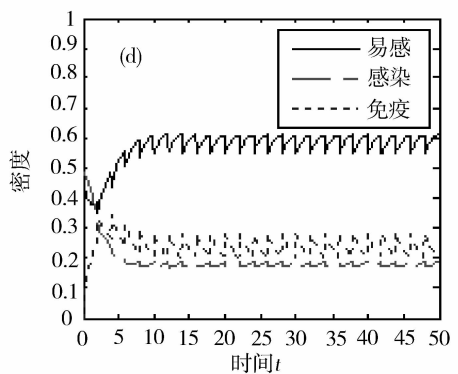
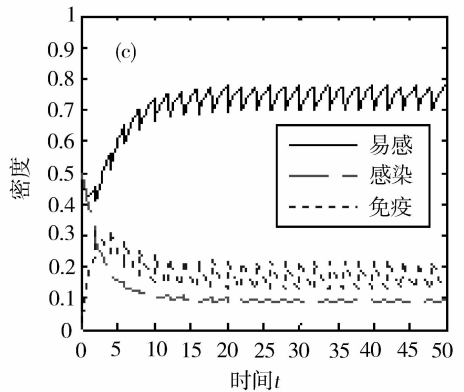
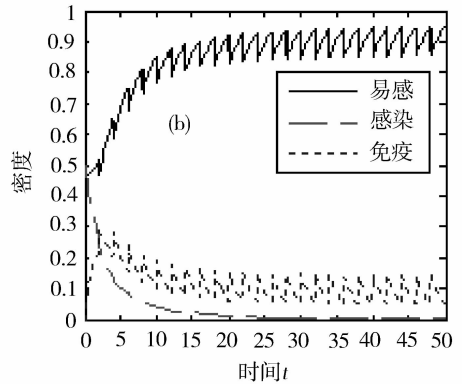
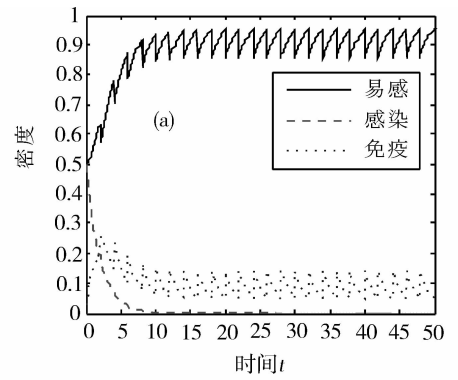


图 3 不同  $v$  下  $S(t), I(t)$  &  $R(t)$  随时间  $t$  变化曲线

- (a) 移动速度  $v = 5$ ; (b) 移动速度  $v = 16$ ;
- (c) 移动速度  $v = 23$ ; (d) 移动速度  $v = 30$

Fig. 3  $S(t), I(t)$  &  $R(t)$  vs. time  $t$  in different  $v$

- (a) Moving velocity  $v = 5$ ; (b) Moving velocity  $v = 16$ ;
- (c) Moving velocity  $v = 23$ ; (d) Moving velocity  $v = 30$

当  $v=5, 16 < v_c$  时,由上述分析可知系统 GAS 在 DF 周期解;当  $v=23, 30 > v_c$  时,由以上分析可知系统 ED 持续存在.从图 3 可知实验仿真与理论分析一致,并且由于节点移动速度增大,病毒传播速度和稳定后感染规模都将增大.

#### 4.2 通信半径 $r$ 对传播的影响

取  $\theta_1=0.1, \theta_2=0.1$ ,移动速度  $v=2$ ,脉冲周期  $T=2$ ,得到基本重生数  $R_0$  与通信半径  $r$  之间的关系如图 4 所示,此时  $R_0$  是关于  $r$  的二次曲线函数,且在区间  $(0, +\infty)$  单调递增.当  $r=4.67$  时,  $R_0=1$ ,所以通信半径阈值  $r_c=4.67$ .因此,当  $r < r_c$  时,由定理 2 可知,系统 GAS 在 DF 周期解.反之,当  $r > r_c$  时,系统 ED 将持续存在.因此,分别取  $r=1, 3, 6, 8$  进行实验得到三种状态节点数量与时间的关系曲线,如图 5 所示.

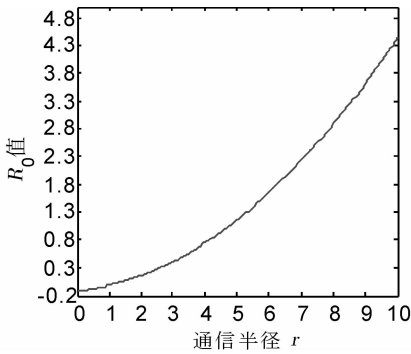


图 4 通信半径  $r$  和  $R_0$  关系

Fig. 4 The relationship between  $R_0$  &  $r$

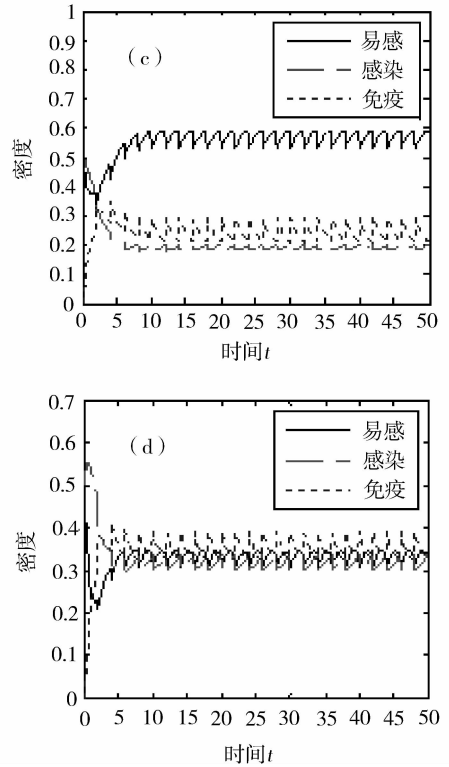
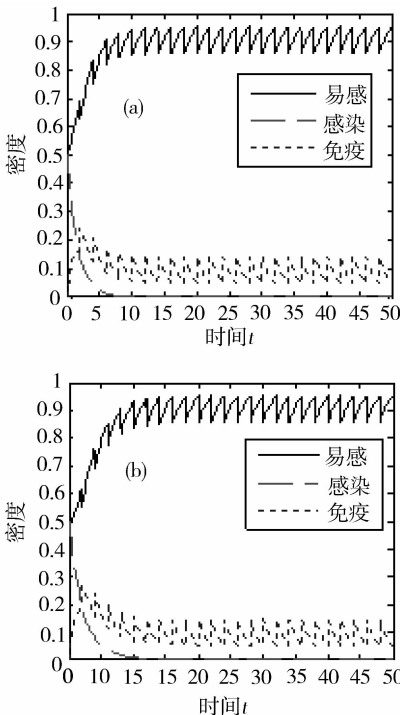


图 5 不同  $r$  下  $S(t), I(t)$  &  $R(t)$  随时间  $t$  变化曲线

- (a) 通信半径  $r=1$ ; (b) 通信半径  $r=3$ ;
- (c) 通信半径  $r=6$ ; (d) 通信半径  $r=8$

Fig. 5  $S(t), I(t)$  &  $R(t)$  vs. time  $t$  in different  $r$

- (a) Communication radius  $r=1$  (b) Communication radius  $r=3$ ;
- (c) Communication radius  $r=6$ ; (d) Communication radius  $r=8$

当  $r=1, 3 < r_c$  时,由上述分析可知系统 GAS 在 DF 周期解;当  $r=6, 8 > r_c$  时,由以上分析可知系统 ED 持续存在.从图 5 可知实验仿真与理论分析一致,并且由于节点通信半径的增大,病毒传播速度和稳定后感染规模都将增大.

#### 4.3 脉冲周期 $T$ 对传播的影响

取  $\theta_1=0.1, \theta_2=0.1$ ,移动速度  $v=2$ ,通信半径  $r=5$ ,得到基本重生数  $R_0$  与脉冲周期  $T$  之间的关系如图 6 所示,此时  $R_0$  是关于  $T$  的指数函数,且在区间  $(0, +\infty)$  单调递增.当  $T=1.06$  时,  $R_0=1$ ,所以脉冲周期阈值  $T_c=1.06$ .因此,当  $T < T_c$  时,由定理 2 知,系统 GAS 在 DF 周期解.反之,当  $T > T_c$  时,系统 ED 将持续存在.因此,分别取  $T=0.5, 0.9, 1.6, 3$  进行实验得到三种状态节点数量随时间变化曲线,如图 7 所示.

当  $T=0.5, 0.9 < T_c$  时,由上述分析可知系统 GAS 在 DF 周期解;当  $T=1.6, 3 > T_c$  时,由以上分析可知系统 ED 持续存在.从图 7 知实验仿真与理论分析一致,并且由于节点脉冲周期的增大,病毒传播速度和稳定后感染规模都将增大.



### 4.4 脉冲免疫率 $\theta_1, \theta_2$ 对传播的影响

取移动速度  $v=2$ , 通信半径  $r=5$ , 脉冲周期  $T=2$ , 得到基本再生数  $R_0$  与脉冲免疫率  $\theta_1, \theta_2$  之间的关系如图 8 所示. 当取  $(\theta_1, \theta_2) = (0.2, 0.2)$  时,  $R_0 = 0.97 < 1$ , 由定理 2 知, 系统 GAS 在 DF 周期

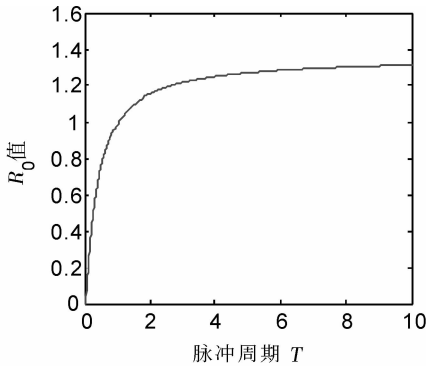


图 6 脉冲周期  $T$  和  $R_0$  关系

Fig. 6 The relationship between  $R_0$  &  $T$

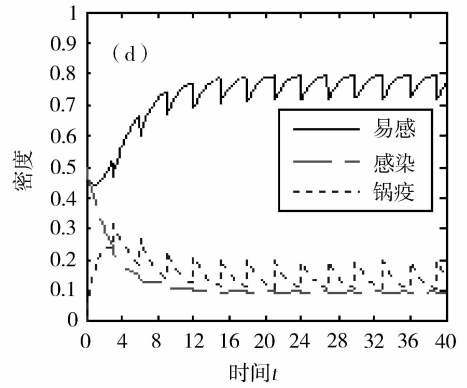
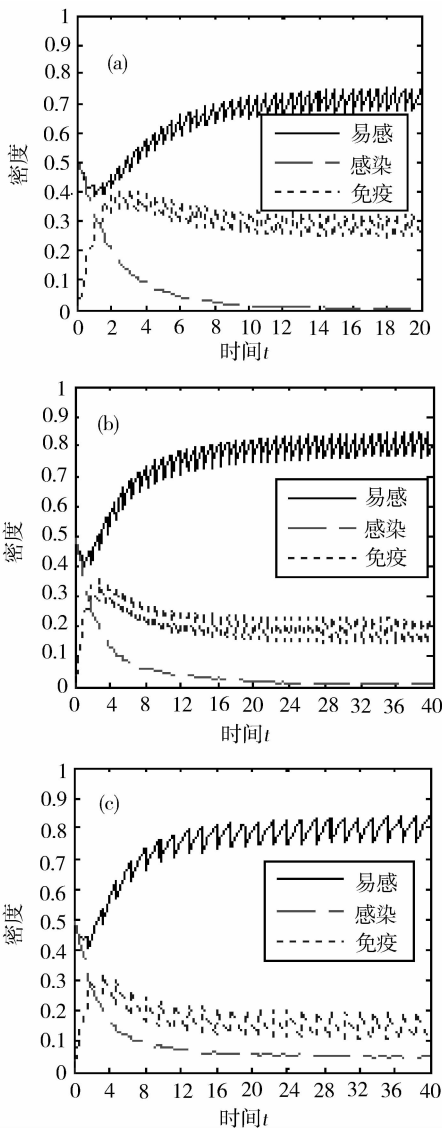


图 7 不同  $T$  下  $S(t), I(t)$  &  $R(t)$  随时间  $t$  变化曲线

- (a) 脉冲周期  $T=0.5$ ; (b) 脉冲周期  $T=0.9$ ;
- (c) 脉冲周期  $T=1.6$ ; (d) 脉冲周期  $T=3$

Fig. 7  $S(t), I(t)$  &  $R(t)$  vs. time  $t$  in different  $T$

- (a) Pulse period  $T=0.5$ ; (b) Pulse period  $T=0.9$ ;
- (c) Pulse period  $T=1.6$ ; (d) Pulse period  $T=3$

解, 如图 9(a) 所示. 当取  $(\theta_1, \theta_2) = (0.05, 0.05)$  时,  $R_0 = 1.25 > 1$ , 系统 ED 将持续存在, 如图 9(b) 所示. 通过图 9 可知实验仿真与理论分析一致, 并且跟着脉冲免疫率  $\theta_1, \theta_2$  的增大, 病毒传播速度和稳定后感染规模都将减少.

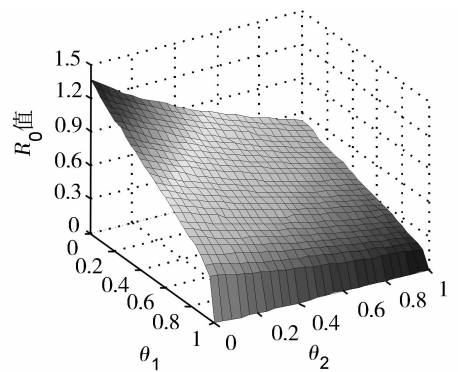
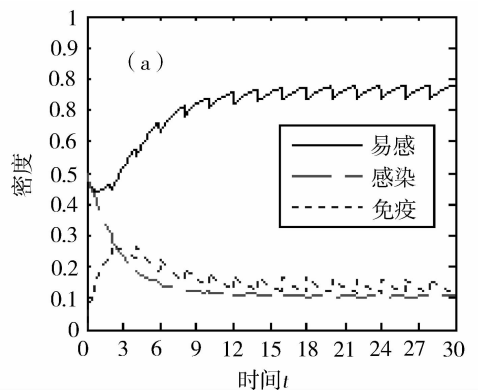


图 8 脉冲免疫率  $\theta_1, \theta_2$  和  $R_0$  关系

Fig. 8 The relationship between  $\theta_1, \theta_2$  &  $R_0$



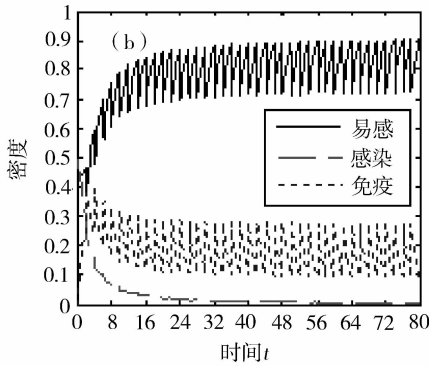


图 9 不同  $(\theta_1, \theta_2)$  下  $S(t), I(t)$  与  $R(t)$  随时间  $t$  变化曲线

(a) 脉冲免疫率  $(\theta_1, \theta_2) = (0.05, 0.05)$ ; (b) 脉冲免疫率  $(\theta_1, \theta_2) = (0.2, 0.2)$

Fig. 9  $S(t), I(t)$  &  $R(t)$  vs. time  $t$  in different  $(\theta_1, \theta_2)$

(a) Pulse immune rate  $(\theta_1, \theta_2) = (0.05, 0.05)$ ; (b) Pulse immune rate  $(\theta_1, \theta_2) = (0.2, 0.2)$

## 5 结束语

本文考虑到移动自组网脉冲免疫的现实可行性,基于移动自组网节点的移动特性,将节点移动速度、通信半径、脉冲免疫率等因素进行统一建模,建立脉冲微分方程下的移动自组网中的 SIRS 病毒传播免疫模型,分析在脉冲免疫下的移动自组网中病毒的传播动力学行为和病毒是否消除的传染临界特性,并基于  $R_0$  研究了系统 DF 周期解存在性和稳定性及该系统 ED 持续存在性.最后,基于  $R_0$  讨论节点移动速度、通信半径、脉冲周期和脉冲免疫率的病毒传播阈值问题,并通过仿真实验进一步验证和表明了上述结论的正确性.对预防和控制移动自组网病毒传播具有较好的参考和使用价值.

### 参考文献:

- [1] 关治洪, 亓玉娟, 姜晓伟, 等. 基于复杂网络的病毒传播模型及其稳定性[J]. 华中科技大学学报, 2011, 39(1): 114.
- [2] 李书伟, 金聪, 郭亚光. 基于平均场理论的手机蓝牙病毒传播模型[J]. 计算机工程, 2012, 38(7): 93.
- [3] 王小明, 李成博, 李英妹. 移动无线传感网恶意数据包传播随机模型[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(6): 1290.

- [4] 刘唐, 彭舰, 杨进. 异构延迟容忍移动传感器网络中基于转发概率的数据传输[J]. 软件学报, 2013, 24(2): 215.
- [5] Hull B, Bychkovsky V, Zhang Y, *et al.* CarTel: a distributed mobile sensor computing system[C]// Proceedings of the 4<sup>th</sup> international conference on Embedded networked sensor systems. Boulder, Colorado, USA: ACM, 2006.
- [6] 苏杰. 一种基于跨层设计的无线 Mesh 网络路由协议的研究[D]. 厦门: 厦门大学, 2008.
- [7] Peng S, Wang G, Yu S. Modeling the dynamics of worm propagation using two-dimensional cellular automata in smartphones[J]. J Comput Sys Sci, 2013, 79(5): 586.
- [8] 向剑平, 左劼, 乔少杰, 等. 网络舆情态势分析研究[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2013, 50(5): 985.
- [9] Yang Q, Mao X. Extinction and recurrence of multi-group SEIR epidemic models with stochastic perturbations[J]. Nonlinear Anal-Real, 2013, 14(3): 1434.
- [10] 李钊, 徐国爱, 班晓芳, 等. 基于 CA 的复杂信息系统安全风险传播研究[J]. 物理学报, 2013, 62(20): 10.
- [11] Yang L X, Yang X. The pulse treatment of computer viruses: a modeling study[J]. Nonlinear Dynam, 2014, 76(2): 1379.
- [12] Yang X, Cao J, Lu J. Stochastic synchronization of complex networks with non-identical nodes via hybrid adaptive and impulsive control[J]. IEEE Transa Circuits & Systems I Regular Papers, 2012, 59(2): 371.
- [13] Yang Q, Mao X. Extinction and recurrence of multi-group SEIR epidemic models with stochastic perturbations[J]. Nonlinear Anal-Real, 2013, 14(3): 1434.
- [14] 赵焱鑫, 王小明, 李黎, 等. 机会网络舆情传播的 MCA 模型及仿真研究[J]. 计算机应用研究, 2015, 32(2): 543.
- [15] 巩永旺, 宋玉蓉, 蒋国平. 移动环境下网络病毒传播模型及其稳定性研究[J]. 物理学报, 2012, 61(11): 46.
- [16] 曹玉林, 张珊珊. 基于节点质量度的 Spray and Focus 路由改进算法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52(3): 505.