

无错区分两个任意分布的未知纬线态

吕彦霖, 祝凤荣

(西南交通大学物理科学与技术学院, 成都 611756)

摘要: 量子态分辨在量子信息和量子计算领域中是一个非常重要的问题。在量子通讯理论和实验的研究过程中,经常要用到赤道态,它是一种比较特殊的纬线态。本文主要利用 Neumark 定理和可编程量子态分辨器的光学实现方法来研究如何无错区分两个任意分布的未知纬线态,推导出了测量算符和对应的成功概率,并且发现本文得到的测量算符与无错区分均匀分布纬线态得到的最优测量算符一致。这些结果对实验室中构造可编程量子分辨器具有重要参考意义。

关键词: 量子态分辨; 光学实现; 最优无错区分; 纬线态

中图分类号: O413.1 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2021.034002

Programmable unambiguous discriminator between two arbitrarily distributed unknown latitudinal states

LÜ Yan-Lin, ZHU Feng-Rong

(School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract: Quantum state discrimination is a very important problem in the field of quantum information and quantum computation. Usually, the equatorial state, a special latitudinal state, is often used to study quantum communication both from theoretical and experimental perspectives. In this paper, we mainly use Neumark's theorem and the optical realization of the programmable quantum state discriminator to investigate how to unambiguously discriminate two unknown latitudinal states of arbitrary distribution. The detection operators and the successful probability are derived. Furthermore, we find that the detection operators obtained in this paper are the same as the optimal detection operators obtained from the unambiguous discrimination of two unknown latitudinal states of uniform distribution. These results have important reference significance for the construction of the programmable quantum discriminator in laboratory.

Keywords: Quantum state discrimination; Optical realization; Optimal unambiguous state discrimination; Latitudinal state

1 引言

量子通信和量子计算中的许多应用都需要用到量子态分辨,例如:量子秘密共享^[1]、量子密钥分

发^[2]、量子安全直接通信^[3]、量子隐形传态^[4-6]等。量子态分辨问题是指许多量子态构成了一个集合,从这个集合中取出一个量子态,如何确定取出的这个量子态是集合中的哪个态。这不是一个容易解

收稿日期: 2020-07-06

基金项目: 国家自然科学基金(11947404); 四川省科技计划项目(20SYSX0294)

作者简介: 吕彦霖(1995—),男,山西运城人,硕士研究生,主要研究方向为量子态分辨。E-mail: lvyl@my.swjtu.edu.cn

通讯作者: 祝凤荣。E-mail: zhufur@ihep.ac.cn

决的问题,因为任意一个未知量子态不可能被精确复制(虽然无法精确复制,但是人们可以实现非精确的量子克隆).当集合中的量子态互相不正交时,我们无法百分百确定取出的这个态是集合中的哪个态.在量子态分辨问题中,人们常用的方案主要有两种,分别是最小容错区分(测量结果可能会出错,但是需确保出错概率取到最低)和最优无错区分(测量结果不会出错,但可能会出现测量结果不能确定待确定态是哪个态的结果,并且需确保出现这种结果的概率取到最低).

为了对两个未知态进行无错分辨,2005 年 Bergou 和 Hillery^[7]设计了一种可编程的量子分辨器.该设备可以在不知道这两个态信息的条件下,分辨出数据寄存器中的待确定态.这样的可编程设备由两个程序寄存器 A、C 和一个数据寄存器 B 构成,假设程序寄存器 A 和 C 中分别储存着量子比特态 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$,数据寄存器 B 中储存着待确定态 $|\psi_i\rangle$ ($|\psi_i\rangle$ 是 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 中的一个,先验概率分别为 η_1 和 η_2 ,且 $\eta_1 + \eta_2 = 1$),则可编程量子分辨器的主要作用是分辨下面两个总输入态:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= |\phi_1\rangle_A |\phi_1\rangle_B |\phi_2\rangle_C \\ |\Psi_2\rangle &= |\phi_1\rangle_A |\phi_2\rangle_B |\phi_2\rangle_C \end{aligned} \quad (1)$$

这个分辨器能够以某种成功概率告诉我们待确定态 $|\psi_i\rangle$ 与 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 中的哪一个相同,所以对两个未知态的最优无错区分问题其实就是针对这两个态寻找最优的无歧分辨器.可编程的量子分辨器就是一个可编程的量子测量器,在数学上有一个全局广义测量与其对应,因此我们可以通过一组广义测量算符来表示它.量子态分辨问题其实就是针对不同类型的态寻找最优的测量算符,并且计算出与其对应的最大成功概率.

上面介绍的这个分辨器中的输入态 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 都是量子比特态,也就是二维单拷贝的.在这个分辨器提出之后,人们又对其进行了实验实现和进一步的推广,将输入态 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 推广到了都是高维单拷贝的情况^[8]和高维任意多拷贝的情况^[9-10].此外,人们还研究了如何无错区分 N 个未知纯量子比特态的问题^[11]、有关无错区分三个线性无关对称态的问题^[12].

本文要区分的两个态是纬线态,它是一种特殊类型的量子比特态,它不像一般量子比特态那样分布在整个态空间,而是被限制在了布洛赫球体的某一纬度线上.它可以表示为

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2)$$

其中, θ 是取值范围 $[0, \pi]$ 中的一个常数, φ 是取值范围 $[0, 2\pi)$ 中的未知数.它在这个范围内任意一点出现的概率服从任意的概率密度函数 $\sigma(\varphi)$,所以我们要区分的两个未知纬线态是:

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi_1} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \\ |\phi_2\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi_2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

其中, φ_1 和 φ_2 是取值范围 $[0, 2\pi)$ 中的未知数,它们服从相同的任意概率密度函数 $\sigma(\varphi)$.

2 测量算符与成功概率的推导

我们实际要无错区分的两个总输入态为:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= |\phi_1\rangle_A |\phi_1\rangle_B |\phi_2\rangle_C \\ |\Psi_2\rangle &= |\phi_1\rangle_A |\phi_2\rangle_B |\phi_2\rangle_C \end{aligned} \quad (4)$$

这里的 $|\Psi_1\rangle$ 和 $|\Psi_2\rangle$ 都是 8 维空间中的态,解决这个问题所用到的广义测量(POVM)应当也是在 8 维空间中进行的.为了便于在实验上实现这个广义测量,我们可以利用 Neumark 定理和可编程量子态分辨器的光学实现方法^[13],在一个更大的希尔伯特空间上作正交测量.首先,我们介绍一个扩大的希尔伯特空间,这个空间是 10 维的,设:

$$\begin{aligned} |000\rangle &\rightarrow |e_1\rangle, |010\rangle \rightarrow |e_2\rangle, |001\rangle \rightarrow |e_3\rangle, \\ |100\rangle &\rightarrow |e_4\rangle, |101\rangle \rightarrow |e_6\rangle, |110\rangle \rightarrow |e_7\rangle, \\ |011\rangle &\rightarrow |e_8\rangle, |111\rangle \rightarrow |e_{10}\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

则总输入态可以表示为 $|\Psi_i^n\rangle = \sum_{j=1}^{N=10} c_j^i |e_j\rangle$, 其中 $i=1, 2$ 且 c_5^i 和 c_9^i 的值总是取 0. 则:

$$\begin{aligned} |\Psi_1^n\rangle &= \cos^3 \frac{\theta}{2} |e_1\rangle + e^{i\varphi_1} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_2\rangle + \\ &e^{i\varphi_2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_3\rangle + e^{i\varphi_1} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_4\rangle + \\ &e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_6\rangle + e^{2i\varphi_1} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_7\rangle + \\ &e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_8\rangle + e^{2i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^3 \frac{\theta}{2} |e_{10}\rangle \\ |\Psi_2^n\rangle &= \cos^3 \frac{\theta}{2} |e_1\rangle + e^{i\varphi_2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_2\rangle + \\ &e^{i\varphi_2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_3\rangle + e^{i\varphi_1} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_4\rangle + \\ &e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_6\rangle + \\ &e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_7\rangle + \\ &e^{2i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_8\rangle + e^{i\varphi_1 + 2i\varphi_2} \sin^3 \frac{\theta}{2} |e_{10}\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

我们可以把这个 10 维希尔伯特空间 H 分为 3 个子空间: $H = H^1 \oplus H^2 \oplus H^3$. 子空间 $H^k (k=1, 2, 3)$ 是 N_k 维的, 输入端的基用 $\{| \rangle_k\}^{\text{in}}$ 来表示, 输出端的基用 $\{| \rangle_k\}^{\text{out}}$ 来表示. 这里定义 $H^1: [N_1 = 2, \{|e_1 \rangle, |e_{10} \rangle\}_{k=1}^{\text{in}}, \{|e'_1 \rangle, |e'_{10} \rangle\}_{k=1}^{\text{out}}]$; $H^2: [N_2 = 4, \{|e_2 \rangle, |e_3 \rangle, |e_4 \rangle, |e_5 \rangle\}_{k=2}^{\text{in}}, \{|e'_2 \rangle, |e'_3 \rangle, |e'_4 \rangle, |e'_5 \rangle\}_{k=2}^{\text{out}}]$; $H^3: [N_3 = 4, \{|e_6 \rangle, |e_7 \rangle, |e_8 \rangle, |e_9 \rangle\}_{k=3}^{\text{in}}, \{|e'_6 \rangle, |e'_7 \rangle, |e'_8 \rangle, |e'_9 \rangle\}_{k=3}^{\text{out}}]$, 则:

$$| \Psi_i^{\text{in}} \rangle = | \Psi_i^1 \rangle + | \Psi_i^2 \rangle + | \Psi_i^3 \rangle \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} | \Psi_1^1 \rangle &= \cos^3 \frac{\theta}{2} |e_1 \rangle + e^{2i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^3 \frac{\theta}{2} |e_{10} \rangle \\ | \Psi_2^1 \rangle &= \cos^3 \frac{\theta}{2} |e_1 \rangle + e^{i\varphi_1 + 2i\varphi_2} \sin^3 \frac{\theta}{2} |e_{10} \rangle \\ | \Psi_1^2 \rangle &= e^{i\varphi_1} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_2 \rangle + \\ &\quad e^{i\varphi_2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_3 \rangle + e^{i\varphi_1} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_4 \rangle \\ | \Psi_2^2 \rangle &= e^{i\varphi_2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_2 \rangle + \\ &\quad e^{i\varphi_2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_3 \rangle + e^{i\varphi_1} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} |e_4 \rangle \\ | \Psi_1^3 \rangle &= e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_6 \rangle + \\ &\quad e^{2i\varphi_1} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_7 \rangle + e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_8 \rangle \\ | \Psi_2^3 \rangle &= e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_6 \rangle + \\ &\quad e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_7 \rangle + e^{2i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |e_8 \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

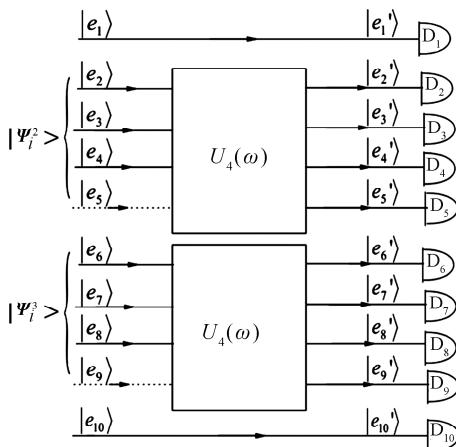


图 1 区分 $| \Psi_1^{\text{in}} \rangle$ 和 $| \Psi_2^{\text{in}} \rangle$ 的分辨器的光学实现

Fig. 1 Optical realization of the discriminator between $| \Psi_1^{\text{in}} \rangle$ and $| \Psi_2^{\text{in}} \rangle$

由于 $| \Psi_1^{\text{in}} \rangle, | \Psi_2^{\text{in}} \rangle, | \Psi_1^{\text{out}} \rangle, | \Psi_2^{\text{out}} \rangle$ 中的每一项的系数都是未知的, 根据他们的对应关系, 可以知道在 H^2 中区分 $| \Psi_1^{\text{in}} \rangle$ 和 $| \Psi_2^{\text{in}} \rangle$ 的分辨器与在 H^3 中区分 $| \Psi_1^{\text{in}} \rangle$ 和 $| \Psi_2^{\text{in}} \rangle$ 的分辨器应该是一样的. 因此我们可以假设分辨器采用图 1 这种形式, 这个分辨器的作用通过 10 维幺正变换 $U_{10}(\omega)$ 来表示:

$$U_{10}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_4(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_4(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中 $U_4(\omega)$ 表示为(其推导见第三部分):

$$\begin{pmatrix} \frac{\sin \omega}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} & \frac{-\sin \omega}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} & 0 & \frac{-\cos \omega}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} \\ \frac{\sin^2 \omega}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} & \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} & 0 & \frac{-\sin \omega \cos \omega}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} \\ \frac{\cos \omega}{\sqrt{1+\cos^2 \omega}} & 0 & \frac{-\cos \omega}{\sqrt{1+\cos^2 \omega}} & \frac{\sin \omega}{\sqrt{1+\cos^2 \omega}} \\ \frac{\cos^2 \omega}{\sqrt{1+\cos^2 \omega}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 \omega}} & \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sqrt{1+\cos^2 \omega}} \end{pmatrix} \quad (10)$$

通过 $U_{10}(\omega)$, 我们可以得到 $| \Psi_i \rangle$ 的输出表示:

$$\begin{aligned} | \Psi_1^{\text{out}} \rangle &= \cos^3 \frac{\theta}{2} |e'_1 \rangle + \\ &\quad \frac{(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) \sin \omega \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} |e'_2 \rangle + \\ &\quad \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} (e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_1} \sin^2 \omega)}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} |e'_3 \rangle + \\ &\quad e^{i\varphi_1} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{1+\cos^2 \omega} |e'_5 \rangle + \\ &\quad e^{i\varphi_1} (e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}) \frac{\sin \omega \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} |e'_6 \rangle + \\ &\quad \frac{e^{i\varphi_1} (e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \sin^2 \omega) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin^2 \omega}} |e'_7 \rangle + \\ &\quad e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{1+\cos^2 \omega} |e'_9 \rangle + \\ &\quad e^{2i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^3 \frac{\theta}{2} |e'_{10} \rangle \\ | \Psi_2^{\text{out}} \rangle &= \cos^3 \frac{\theta}{2} |e'_1 \rangle + \\ &\quad e^{i\varphi_2} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{1+\sin^2 \omega} |e'_3 \rangle + \\ &\quad \frac{(e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}) \cos \omega \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\cos^2 \omega}} |e'_4 \rangle + \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \cos^2 \omega) \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + \cos^2 \omega}} |e'_5\rangle + \\
 & e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \omega} |e'_7\rangle + \\
 & \frac{e^{i\varphi_2} (e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) \cos \omega \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + \cos^2 \omega}} |e'_8\rangle + \\
 & e^{i\varphi_2} (e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_1} \cos^2 \omega) \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + \cos^2 \omega}} |e'_9\rangle + \\
 & e^{i\varphi_1 + 2i\varphi_2} \sin^3 \frac{\theta}{2} |e'_{10}\rangle
 \end{aligned} \tag{12}$$

由此, 我们可以在输出端定义测量算符:

$$\begin{aligned}
 \Pi_1^{\text{out}}(\omega) &= |e'_2\rangle\langle e'_2| + |e'_6\rangle\langle e'_6| \\
 \Pi_2^{\text{out}}(\omega) &= |e'_4\rangle\langle e'_4| + |e'_8\rangle\langle e'_8| \\
 \Pi_0^{\text{out}}(\omega) &= I - \Pi_1^{\text{out}}(\omega) - \Pi_2^{\text{out}}(\omega)
 \end{aligned} \tag{13}$$

他们满足条件: $\Pi_1^{\text{out}}|\Psi_2^{\text{out}}\rangle = \Pi_2^{\text{out}}|\Psi_1^{\text{out}}\rangle = 0$. 则成功区分的概率为

$$\begin{aligned}
 P(\omega) &= \eta_1 \langle \Psi_1^{\text{out}} | \Pi_1^{\text{out}} | \Psi_1^{\text{out}} \rangle + \\
 & \eta_2 \langle \Psi_2^{\text{out}} | \Pi_2^{\text{out}} | \Psi_2^{\text{out}} \rangle = \\
 & \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} (2 - e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} - e^{i\varphi_2 - i\varphi_1}) \cdot \\
 & \left(\frac{\eta_1 \sin^2 \omega}{1 + \sin^2 \omega} + \frac{\eta_2 \cos^2 \omega}{1 + \cos^2 \omega} \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

令 $\cos^2 \omega = x$, 则 x 的取值范围为 $[0, 1]$, 此时 $P(\omega)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \left[1 - \left(\frac{\eta_1}{2-x} + \frac{\eta_2}{1+x} \right) \right] (2 - e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} - \\
 & e^{i\varphi_2 - i\varphi_1}) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{15}$$

通过计算得: 当 $x = x_0 = \frac{2\sqrt{\eta_2} - \sqrt{\eta_1}}{\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\eta_2}}$ 时, $\frac{dP(x)}{dx} = 0$.

所以对应于 x 的最大成功概率 P^{\max} 为:

$$\begin{cases}
 P(x=1) = \frac{1}{2} \eta_2 (2 - e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} - e^{i\varphi_2 - i\varphi_1}) \cdot \\
 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \eta_1 < \frac{1}{5} \\
 P(x=x_0) = \frac{2}{3} (1 - \sqrt{\eta_1 \eta_2}) (2 - e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} - \\
 e^{i\varphi_2 - i\varphi_1}) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \frac{1}{5} \leq \eta_1 \leq \frac{4}{5} \\
 P(x=0) = \frac{1}{2} \eta_1 (2 - e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} - e^{i\varphi_2 - i\varphi_1}) \\
 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \eta_1 > \frac{4}{5}
 \end{cases} \tag{16}$$

其中, φ_1 与 φ_2 是未知的, 但是它们满足一个相同的

任意分布. 这个分布的概率密度函数为 $\sigma(\varphi)$, 所以这里我们用它的平均值来代替它. 计算得 $2 - e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} - e^{i\varphi_2 - i\varphi_1}$ 的平均值为 $2 - 2|g|^2$, 其中 $g = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \sigma(\varphi) d\varphi$, 对应于 x 的最大成功概率 P^{\max} 为

$$P^{\max} = \begin{cases} \frac{1}{4} \eta_2 (1 - |g|^2) \sin^2 \theta, \eta_1 < \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} (1 - \sqrt{\eta_1 \eta_2}) (1 - |g|^2) \sin^2 \theta, \frac{1}{5} \leq \eta_1 \leq \frac{4}{5} \\ \frac{1}{4} \eta_1 (1 - |g|^2) \sin^2 \theta, \eta_1 > \frac{4}{5} \end{cases} \tag{17}$$

通过 $U_{10}(\omega)$ 我们可以在输入端表示出式(13)定义的测量算符

$$\begin{aligned}
 \Pi_1^{\text{in}}(\omega) &= \frac{\sin^2 \omega}{1 + \sin^2 \omega} [(|e_2\rangle - |e_3\rangle - \\
 & \frac{\cos \omega}{\sin \omega} |e_5\rangle) (\langle e_2| - \langle e_3| - \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \langle e_5|) + \\
 & (|e_6\rangle - |e_7\rangle - \frac{\cos \omega}{\sin \omega} |e_9\rangle) \cdot \\
 & (\langle e_6| - \langle e_7| - \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \langle e_9|)]
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_2^{\text{in}}(\omega) &= \frac{\cos^2 \omega}{1 + \cos^2 \omega} [(|e_2\rangle - |e_4\rangle + \\
 & \frac{\sin \omega}{\cos \omega} |e_5\rangle) (\langle e_2| - \langle e_4| + \frac{\sin \omega}{\cos \omega} \langle e_5|) + \\
 & (|e_6\rangle - |e_8\rangle + \frac{\sin \omega}{\cos \omega} |e_9\rangle) \cdot \\
 & (\langle e_6| - \langle e_8| + \frac{\sin \omega}{\cos \omega} \langle e_9|)]
 \end{aligned} \tag{19}$$

经过计算可知:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} [(|e_2\rangle - |e_4\rangle) (\langle e_2| - \langle e_4|) + \\
 & (|e_6\rangle - |e_8\rangle) (\langle e_6| - \langle e_8|)] = P_{AB}^{\text{as}} \otimes I_C \\
 & \frac{1}{2} [(|e_2\rangle - |e_3\rangle) (\langle e_2| - \langle e_3|) + (|e_6\rangle - \\
 & |e_7\rangle) (\langle e_6| - \langle e_7|)] = I_A \otimes P_{BC}^{\text{as}}
 \end{aligned} \tag{20}$$

则式(17)表示的成功概率对应的测量算符在 $|ijk\rangle$ ($i, j, k = 0, 1$) 张成的 8 维子空间中可以表示为:

$$\begin{aligned}
 & \text{当 } \eta_1 < \frac{1}{5} \text{ 时, } \Pi_1 = 0, \Pi_2 = P_{AB}^{\text{as}} \otimes I_C; \\
 & \text{当 } \frac{1}{5} \leq \eta_1 \leq \frac{4}{5} \text{ 时, } \Pi_1 = \frac{2}{3} (2 - \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}) I_A \otimes P_{BC}^{\text{as}}, \\
 & \Pi_2 = \frac{2}{3} (2 - \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}) P_{AB}^{\text{as}} \otimes I_C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{当 } \eta_1 > \frac{4}{5} \text{ 时, } \Pi_1 = I_A \otimes P_{BC}^{\text{as}}, \Pi_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

其中, P_{AB}^{as} 和 P_{BC}^{as} 表示对应量子比特反对称子空间

上的投影算符, I_A 和 I_C 分别表示量子比特 A 和 C 空间上的单位算符.

文献[14]中讨论的问题是如何最优无错区分两个均匀分布的未知纬线态, 得到的最优测量算符为

$$\begin{cases} \Pi_1^{\text{opt}} = 0, \Pi_2^{\text{opt}} = P_{AB}^{\text{as}} \otimes I_C, \eta < \frac{1}{5} \\ \Pi_1^{\text{opt}} = \frac{2}{3} (2 - \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}) I_A \otimes P_{BC}^{\text{as}}, \Pi_2^{\text{opt}} = \\ \frac{2}{3} (2 - \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}) P_{AB}^{\text{as}} \otimes I_C, \frac{1}{5} \leq \eta \leq \frac{4}{5} \\ \Pi_1^{\text{opt}} = I_A \otimes P_{BC}^{\text{as}}, \Pi_2^{\text{opt}} = 0, \eta > \frac{4}{5} \end{cases} \quad (22)$$

这与本文得到的测量算符一致.

3 $U_4(\omega)$ 的推导

在 H^2 中区分 $|\Psi_1^2\rangle$ 和 $|\Psi_2^2\rangle$ 的分辨器与在 H^3 中区分 $|\Psi_1^3\rangle$ 和 $|\Psi_2^3\rangle$ 的分辨器应该是一样的, 因为这两个分辨器所要区分的两个态都可以表示为下面两个态:

$$\begin{aligned} |\Phi_1^{\text{in}}\rangle &= a|v_1\rangle + b|v_2\rangle + a|v_3\rangle \\ |\Phi_2^{\text{in}}\rangle &= c|v_1\rangle + c|v_2\rangle + d|v_3\rangle \end{aligned} \quad (23)$$

其中 a, b, c, d 为未知复数, 我们可以构造一个光学设备来无错区分这两个态. 定义一个希尔伯特空间 $H': [M=4, \{|v_k\rangle\}^{\text{in}}, \{|v'_l\rangle\}^{\text{out}}]$, 其中 $k, l=1, 2, 3, 4$, 则 $|\Phi_i^{\text{in}}\rangle$ 可以表示为 $|\Phi_i^{\text{in}}\rangle = \sum_{j=1}^{M=4} h_j^i |v_j\rangle$, 其中 $h_4^i = 0 (i=1, 2)$. 因为任意纯态都能通过单光子态来实现, 并且任意一个么正变换都能够通过一个光学网络来实现, 这个光学网络由相移器、分束仪等仪器构成, 所以我们可以构造一个如图 2 所示的光学设备去无错区分 $|\Phi_1^{\text{in}}\rangle$ 和 $|\Phi_2^{\text{in}}\rangle$. 这个光学设备的作用可以用么正变换 U_4 来表示, 它有 4 个输入端口 v_i 和 4 个输出端口 v'_j . 这里我们假设每束光都是单色辐射, 则输入光束可以用 $|v_i\rangle$ 来表示, 输出光束可以用 $|v'_j\rangle$ 来表示, U_4 的矩阵元可以通过 $U_{4ji} = \langle v'_j | U_4 | v_i \rangle$ 来得到. 如图 3 所示的四端口光学干涉仪所起的作用我们可以通过 2 维么正变换 U_2 来表示:

$$U_2 = \begin{bmatrix} -\sin\eta e^{i\varphi} & \cos\eta e^{i\varphi} \\ \cos\eta e^{i\varphi} & \sin\eta e^{i\varphi} \end{bmatrix} \quad (24)$$

在干涉仪中, 分束仪起的作用可以通过一个二维实变换来表示:

$$\begin{pmatrix} -\sin\eta & \cos\eta \\ \cos\eta & \sin\eta \end{pmatrix} \quad (25)$$

分束仪的反射率和透射率分别为 $\sqrt{R} = \cos\eta$ 和 $\sqrt{T} = \sin\eta$.

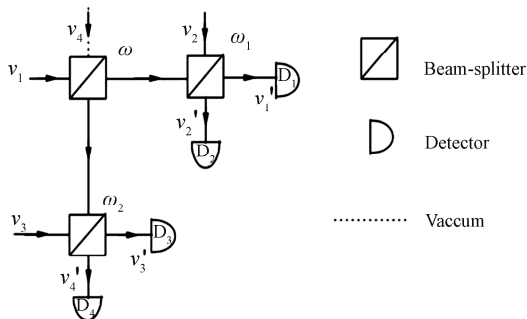


图 2 区分 $|\Phi_1^{\text{in}}\rangle$ 和 $|\Phi_2^{\text{in}}\rangle$ 的分辨器的光学实现
Fig. 2 Optical realization of the discriminator between $|\Phi_1^{\text{in}}\rangle$ and $|\Phi_2^{\text{in}}\rangle$

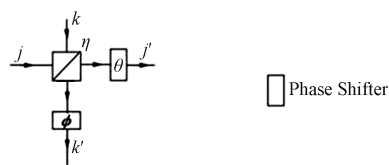


图 3 U_2 的光学实现
Fig. 3 Optical realization of U_2

下面我们来求 U_4 的具体表示.

$$\begin{aligned} U_4 |v_1\rangle &= -\sin\omega (-\sin\omega_1 |v'_1\rangle + \cos\omega_1 |v'_2\rangle) + \cos\omega (\cos\omega_2 |v'_3\rangle + \sin\omega_2 |v'_4\rangle) \\ U_4 |v_2\rangle &= \cos\omega_1 |v'_1\rangle + \sin\omega_1 |v'_2\rangle \\ U_4 |v_3\rangle &= -\sin\omega_2 |v'_3\rangle + \cos\omega_2 |v'_4\rangle \\ U_4 |v_4\rangle &= \cos\omega (-\sin\omega_1 |v'_1\rangle + \cos\omega_1 |v'_2\rangle) + \sin\omega (\cos\omega_2 |v'_3\rangle + \sin\omega_2 |v'_4\rangle) \end{aligned} \quad (26)$$

为了让 $|\Phi_1^{\text{in}}\rangle$ 和 $|\Phi_2^{\text{in}}\rangle$ 的输出表示有差异, 需要让 ω_1, ω_2 和 ω 满足下列关系:

$$\begin{aligned} \sin\omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\omega}}, \cos\omega_1 = \frac{-\sin\omega}{\sqrt{1+\sin^2\omega}} \\ \sin\omega_2 &= \frac{\cos\omega}{\sqrt{1+\cos^2\omega}}, \cos\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\omega}} \end{aligned} \quad (27)$$

则, 式(26)可以表示为:

$$\begin{aligned} U_4(\omega) |v_1\rangle &= \frac{\sin\omega}{\sqrt{1+\sin^2\omega}} (|v'_1\rangle + \sin\omega |v'_2\rangle) + \frac{\cos\omega}{\sqrt{1+\cos^2\omega}} (|v'_3\rangle + \cos\omega |v'_4\rangle) \\ U_4(\omega) |v_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\omega}} (-\sin\omega |v'_1\rangle + |v'_2\rangle) \\ U_4(\omega) |v_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\omega}} (-\cos\omega |v'_3\rangle + |v'_4\rangle) \end{aligned}$$

$$U_4(\omega)|v_4\rangle = \frac{-\cos\omega}{\sqrt{1+\sin^2\omega}}(|v'_1\rangle + \sin\omega|v'_2\rangle) + \frac{\sin\omega}{\sqrt{1+\cos^2\omega}}(|v'_3\rangle + \cos\omega|v'_4\rangle) \quad (28)$$

由此可得式(10)中的矩阵 $U_4(\omega)$. 通过 $U_4(\omega)$ 我们可以在输出端表示出 $|\Phi_i^{\text{out}}\rangle$

$$|\Phi_1^{\text{out}}\rangle = \frac{(a-b)\sin\omega}{\sqrt{1+\sin^2\omega}}|v'_1\rangle + \frac{a\sin^2\omega+b}{\sqrt{1+\sin^2\omega}}|v'_2\rangle + a\sqrt{1+\cos^2\omega}|v'_4\rangle \quad (29)$$

$$|\Phi_2^{\text{out}}\rangle = c\sqrt{1+\sin^2\omega}|v'_2\rangle + \frac{(c-d)\cos\omega}{\sqrt{1+\cos^2\omega}}|v'_3\rangle + \frac{c\cos^2\omega+d}{\sqrt{1+\cos^2\omega}}|v'_4\rangle \quad (30)$$

每个输出路径 v'_j 都有对应的探测器 D_j , 这些探测器可以告诉我们输入态的情况: 当 D_3 探测到光子时, 我们可以确定输入态为 $|\Phi_2^{\text{in}}\rangle$; 当 D_1 探测到光子时, 我们可以确定输入态为 $|\Phi_1^{\text{in}}\rangle$; 当 D_2 和 D_4 探测到光子时, 我们无法确定输入态.

4 结 论

我们研究了针对两个任意分布的未知纬线态的可编程无错分辨器, 得到了测量算符的具体表达式和对应的成功概率, 这对于构造可编程分辨器来说具有重要参考意义. 本文得到的测量算符可以无错区分两个任意分布的未知纬线态, 但是不能确定是否是最优的. 文献[14]中严格推导了当 $\sigma(\varphi)$ 取均匀分布对应的 $1/2\pi$ 时的最优测量算符的表达式, 这个表达式与本文得到的测量算符相同, 这说明, 本文得到的测量算符对于无错区分两个均匀分布的未知纬线态来说是最优的.

参考文献:

- [1] Zhou Y Y, Yu J, Yan Z H, *et al.* Quantum secret sharing among four players using multipartite bound entanglement of an optical field [J]. *Phys Rev Lett*, 2018, 121: 150502.
- [2] Boaron A, Boso G, Rusca D, *et al.* Secure quantum key distribution over 421 km of optical fiber [J].

- Phys Rev Lett*, 2018, 121: 190502.
- [3] Zhang W, Ding D S, Sheng Y B, *et al.* Quantum secure direct communication with quantum memory [J]. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 220501.
- [4] 王贵祥, 刘晓东, 胡占宁. 基于三粒子 GHZ 态的双向量子可控隐形传态[J]. *原子与分子物理学报*, 2018, 35: 1010.
- [5] 郭耀武, 高德恒, 韩锴, 等. 双光子 J-C 模型实现非定域双原子系统量子特性的远程控制[J]. *原子与分子物理学报*, 2019, 36: 818.
- [6] 宫艳丽, 萨楚尔夫, 张采花. 运动纠缠双原子与二项式光场相互作用的纠缠特性[J]. *原子与分子物理学报*, 2020, 37: 102.
- [7] Bergou J A, Hillery M. Universal programmable quantum state discriminator that is optimal for unambiguously distinguishing between unknown states [J]. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 160501.
- [8] Zhou T. Unambiguous discrimination between two unknown qudit states [J]. *Quantum Inf Pro*, 2012, 11: 1669.
- [9] Zhou T, Cui J X, Wu X H, *et al.* Multicopy programmable discriminators between two unknown qubit states with group-theoretic approach [J]. *Quantum Inf Comput*, 2012, 12: 1017.
- [10] Zhou T. Success probabilities for universal unambiguous discriminators between unknown pure states [J]. *Phys Rev A*, 2014, 89: 014301.
- [11] Jafarizadeh M A, Mahmoudi P, Akhgar D, *et al.* Designing an optimal, universal, programmable, and unambiguous discriminator for N unknown qubits [J]. *Phys Rev A*, 2017, 96: 052111.
- [12] Zhang W H, Nie W Y, Ren G. Unambiguous discrimination among three linearly independent symmetric states [J]. *J Mod Optic*, 2019, 66: 1152.
- [13] Wu X H, Gong Y X. Optical realization of the unambiguous discriminator for unknown quantum states [J]. *Phys Rev A*, 2008, 78: 042315.
- [14] Sunian X B, Li Y W, Zhou T. Optimal programmable unambiguous discriminator between two unknown latitudinal states [J]. *Sci China Phys Mech Astron*, 2016, 59: 100312.

引用本文格式:

中 文: 吕彦霖, 祝凤荣. 无错区分两个任意分布的未知纬线态[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2021, 58: 034002.

英 文: Lü Y L, Zhu F R. Programmable unambiguous discriminator between two arbitrarily distributed unknown latitudinal states [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2021, 58: 034002.