2017 年 3 月 四川大学学报(自然科学版) Mar. 2017
第 54 卷 第 2 期 Journal of SichuanUniversity (Natural Science Edition) Vol. 54 No. 2

doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2017. 03. 005

非线性二阶 Robin 问题多正解的存在性

龙 严
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘 要：本文利用不动点指数理论证明了如下非线性二阶 Robin 问题

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) + \lambda f(u(t)) = 0,\ t \in (0,1),\ k \neq 0, \\ u'(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases}$$

多个正解的存在性，其中 $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ 为连续函数且有多个零点，$\lambda > 0$ 为参数.

关键词：Robin 问题；多解性；不动点指数
中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2017)02-0249-04

Multiplicity of solutions for nonlinear second-order Robin problems

LONG Yan
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we use the fixed point index theory to show the existence of multiple positive solutions for the following second order Robin problems:

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) + \lambda f(u(t)) = 0,\ t \in (0,1),\ k \neq 0, \\ u'(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases}$$

where $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ is continuous and has multiple zeros, $\lambda > 0$ is a parameter.

Keywords: Robin problem; Multiplicity; Fixed point index
(2010 MSC 34B15, 34B18)

1 引 言

常微分方程两点边值问题在经济学、生态学、物理学以及化学等领域有着广泛的应用，其正解的存在性及多解性已经引起了许多学者的关注，并获得了一些系统而深刻的结果.本文考虑问题

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) + \lambda f(u(t)) = 0, \\ \quad t \in (0,1), k \neq 0, \\ u'(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

多个正解的存在性.

1994 年，文献 [1] 中利用锥拉伸和压缩不动点定理研究了二阶边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + f(t,u) = 0,\ t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性与多解性. 1996 年，文献 [2] 推广了上述工作. 此后这类问题也为诸多学者所研究，参见文献 [1～9]. 值得注意的是，这些工作都属于问题(1)当 $k = 0$ 的情形，而当 $k \neq 0$ 时，研究较少. 此外，文献 [3] 研究了边值问题

$$\begin{cases} -u''(t) + Mu = f(t,u),\ t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

的多解性. 其中 $f \in C([0,1] \times [0,\infty),[0,\infty))$，$M > 0$. 记

收稿日期：2016-09-21
基金项目：国家自然科学基金(11671322)；国家自然科学基金天元基金(11626016)
作者简介：龙严(1992－)，女，河南新乡人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：m18298408928@163.com

$$f_0=\lim_{u\to 0}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u},$$

$$f_\infty=\lim_{u\to\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u},$$

$$f^0=\lim_{u\to 0}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u},f^\infty=\lim_{u\to\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}.$$

该文利用锥上的不动点理论获得了以下结论：

定理 A 假设 $f_0=f_\infty=\infty$. 若存在 $\lambda>0$，使得 $u\in[\sigma\lambda,\lambda],t\in[0,1]$ 时，$f(t,u)<6\lambda$，则边值问题 (3) 至少有两个正解 $0<\|u_1\|<\lambda<\|u_2\|$.

定理 B 假设 $f^0=f^\infty=0$. 若存在 $\lambda>0$，使得 $u\in[\sigma\lambda,\lambda],t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ 时，$f(t,u)>\frac{3\lambda}{2\sigma^2}$，则边值问题 (3) 至少有两个正解.

以往这些工作多数是在非线性项 f 满足超线性或次线性条件下得到至少一个正解或两个正解的存在性，而没有更多解的情形. 因此本文假设非线性项有多个零点，进而讨论了非线性项零点个数与问题(1)解个数之间的关系.

在研究这类问题时，Green 函数是一个重要工具. 借助 Green 函数可以将微分方程边值问题的存在性、唯一性及多解性转化成算子不动点的存在性、唯一性及多解性. 2011 年，文献 [4] 研究了二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)+\lambda^2u=f(t),\\ \quad t\in[0,1],\lambda\neq 0,\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}\tag{4}$$

用常数变异法计算了问题(4)的 Green 函数，并得到以下定理：

定理 C 问题 (4) 有唯一解 $u(t)=\int_0^1 G_1(t,s)f(s)\mathrm{d}s$，其中

$$G_1(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\sinh(\lambda s)\sinh(\lambda(1-t))}{\lambda\sinh(\lambda)},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{\sinh(\lambda t)\sinh(\lambda(1-s))}{\lambda\sinh(\lambda)},0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

运用与文献[4]类似的方法，我们可以得到问题 (1) 有解当且仅当 u 是下面积分方程的解：

$$u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s,\ t\in[0,1]\tag{5}$$

其中 $G(t,s)$ 表示边值问题

$$\begin{cases}u''(t)-k^2u(t)=0,\ t\in(0,1),\ k\neq 0,\\ u'(0)=0,\ u(1)=0\end{cases}$$

的 Green 函数

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\cosh(ks)\sinh(k(1-t))}{k\cosh(k)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{\cosh(kt)\sinh(k(1-s))}{k\cosh(k)},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

这里 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. 显然，$G(t,s)\geqslant 0$.

本文总假定：

(H1) $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为连续函数，且存在两个正的点列 $\{a_i\},\{b_i\}(i=1,2,\cdots,n)$, $a_i<b_i\leqslant a_{i+1}<b_{i+1}$，使得 $f(a_i)=0,f(b_i)=0$，并且在 (a_i,b_i) 上 $f(u)>0$.

2 预备知识

令 $X=C[0,1]$. 则其按范数 $\|u\|=\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 构成 Banach 空间. 设集合 $K\subseteq X$，且 $K=\{u\in X:u(t)$ 关于 t 递减,$u(1)=0,u(t)\geqslant(1-t)\|u\|,\forall t\in[0,1]\}$. 容易验证 K 是 X 中的锥. 对于任意的 $r>0$，定义

$$\Omega_r=\{u\in K:\|u\|<r\}$$

并记

$$\partial\Omega_r=\{u\in K:\|u\|=r\}.$$

定义映射 $F:K\to X$，

$$Fu(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s,\ t\in[0,1]\tag{6}$$

则问题 (1) 的解等价于算子方程 $Fu=u$ 的不动点.

引理 2.1[12] 设 E 为 Banach 空间，K 为 E 中的一个锥. 对任意的 $r>0$，定义

$$K_r=\{u\in K:\|u\|<r\}.$$

假设 $T:\overline{K_r}\to K$ 全连续，且对于 $u\in\partial K_r=\{u\in K:\|u\|=r\},Tu\neq u$.

(i) 如果对 $u\in\partial K_r$，有 $\|Tu\|\geqslant\|u\|$ 成立，则 $i(T,K_r,K)=0$;

(ii) 如果对 $u\in\partial K_r$，有 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$ 成立，则 $i(T,K_r,K)=1$.

引理 2.2 对任意的 $u\in X,u(t)\geqslant 0$ 且 $u'(t)$ 在 $[0,1]$ 上关于 t 递减，则

$$u(t)\geqslant\min\{t,1-t\}\|u\|,\ t\in[0,1]\tag{7}$$

特别地，对 $0<\alpha<\beta<1$，有

$$\min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}u(t)\geqslant\min\{\alpha,1-\beta\}\|u\|,t\in[0,1].$$

进一步，若 $u(0)=\|u\|$，那么

$$u(t)\geqslant(1-t)\|u\|,\ t\in[0,1]\tag{8}$$

证明　因为 $u'(t)$ 关于 t 递减，所以对 $0 \leqslant t_0 < t < t_1 \leqslant 1$ 有

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\mathrm{d}s \geqslant (t - t_0)u'(t),$$

$$u(t_1) - u(t) = \int_{t}^{t_1} u'(s)\mathrm{d}s \geqslant (t_1 - t)u'(t).$$

则

$$u(t) \geqslant \frac{(t_1 - t)u(t_0) + (t - t_0)u(t_1)}{t_1 - t_0} \tag{9}$$

取 $\sigma \in [0,1]$，使得 $u(\sigma) = \|u\|$. 在 $t_0 = 0, t_1 = \sigma$ 与 $t_0 = \sigma, t_1 = 1$ 时 (9) 式可分别写为

$$u(t) \geqslant t\|u\|,\ t \in [0,\sigma],$$

$$u(t) \geqslant (1-t)\|u\|,\ t \in [\sigma,1].$$

所以(7)式成立，结论得证.

引理 2.3　$F(K) \subset K$ 且 $F: K \to K$ 全连续.

证明　由 (8) 式与 F 的定义可知 $F(K) \subset K$. 积分算子 F 的全连续性显然. 证毕.

对于任意的 $i = 1,\cdots,n$，定义 f_i 如下：

$$f_i(u) = \begin{cases} f(u), & 0 \leqslant u \leqslant b_i, \\ 0, & b_i \leqslant u. \end{cases}$$

定义映射 $F_i: K \to X$ 为：

$$F_i u(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f_i(u(s))\mathrm{d}s,\ t \in [0,1] \tag{10}$$

引理 2.4　假设条件 (H1) 成立. 若 $u \in K$ 是问题 (10) 的解，则 u 是问题 (1) 的解，且 $\sup\limits_{t \in [0,1]} u(t) \leqslant b_i$.

证明　设 u 是下面问题的解

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) + \lambda f_i(u(t)) = 0, \\ \quad t \in (0,1), k \neq 0, \\ u'(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

反设 $\sup\limits_{t \in [0,1]} u(t) = u(0) > b_i$. 则存在 $t_0 \in (0,1)$ 使得当 $t \in [0,t_0)$ 时 $u(t) > b_i$ 且 $u(t_0) = b_i$. 由条件 (H1) 与 f_i 的定义可得

$$u''(t) - k^2 u(t) = 0,\ t \in (0,t_0] \tag{12}$$

对(12)式两端同时乘以 u' 再关于 t 从 0 到 t_0 积分可得

$$\int_0^{t_0} u''(t)u'(t)\mathrm{d}t = k^2 \int_0^{t_0} u(t)u'(t)\mathrm{d}t.$$

化简得

$$(u'(t_0))^2 = k^2(u^2(t_0) - u^2(0)) \tag{13}$$

由 $u(0) > u(t_0)$ 可得

$$k^2(u^2(t_0) - u^2(0)) < 0.$$

又 $(u'(t_0))^2 > 0$. 这与 (13) 式矛盾！故 $\sup\limits_{t \in [0,1]} u(t) \leqslant b_i$.

另一方面，由于在 $0 \leqslant u \leqslant b_i$ 上 $f(u) \equiv f_i(u)$，则 u 是问题 (1) 的解. 证毕.

引理 2.5　假设条件(H1)成立. 令 $\max\{\frac{a_i}{b_i}: 1 \leqslant i \leqslant n\} < \varepsilon < 1$，且对任意的 $i \in \{1,\cdots,n\}$，存在 r_i 使得 $[\varepsilon r_i, r_i] \subset (a_i, b_i)$. 进一步，对任意的 $u \in \partial\Omega_{r_i}$，有

$$\|F_i u\| \geqslant \frac{\lambda \sinh(k\varepsilon)\sinh(k(1-\varepsilon))}{k^2\cosh(k)}\omega_{r_i}$$

成立，其中 $\omega_{r_i} = \min\limits_{\varepsilon r_i \leqslant u \leqslant r_i}\{f_i(u)\} > 0$.

证明　由 ε 的任意性可知 r_i 显然存在. 对任意的 $u \in K$，有

$$u(t) \geqslant u(0)(1-t),\ t \in [0,1].$$

特别地，对任意的 $t \in [0, 1-\varepsilon]$ 有

$$\varepsilon u(0) \leqslant u(t) \leqslant u(0).$$

令 $u \in \partial\Omega_{r_i}$. 则 $f(u(t)) \geqslant \omega_{r_i}$. 所以

$$\begin{aligned} \|F_i u\| &\geqslant \\ &\lambda \int_0^t \frac{\cosh(ks)\sinh(k(1-t))}{k\cosh(k)} f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \\ &\lambda\omega_{r_i} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\cosh(ks)\sinh(k\varepsilon)}{k\cosh(k)}\mathrm{d}s \geqslant \\ &\frac{\lambda\sinh(k\varepsilon)\sinh(k(1-\varepsilon))}{k^2\cosh(k)}\omega_{r_i}. \end{aligned}$$

3　主要结果

定理 3.1　若条件 (H1) 成立，则存在 λ_0，使得对任意的 $\lambda \geqslant \lambda_0$，问题 (1) 有 n 个不同的正解 $u_1,\cdots,u_n$ 且满足

$$a_i < \sup_{t \in [0,1]} u_i(t) \leqslant b_i\ (i = 1,2,\cdots,n).$$

证明　取

$$\lambda_0 \geqslant \frac{k^2\cosh(k)}{\sinh(k\varepsilon)\sinh(k(1-\varepsilon))}\max\{\frac{r_i}{\omega_{r_i}}: i = 1, 2,\cdots,n\}.$$

对于任意的 $i = 1,2,\cdots,n$ 和 $\lambda > \lambda_0$，由引理 2.5 可知

$$\|F_i u\| > \|u\|,\ \forall u \in \partial\Omega_{r_i}.$$

另一方面，对于 $\lambda > \lambda_0$，由 $f_i(u)$ 的有界性可知，存在 $R_i > r_i$，使得

$$\|F_i u\| < \|u\|,\ \forall u \in \partial\Omega_{R_i}.$$

由引理 2.1 可知，

$$i(F_i, \Omega_{r_i}, K) = 0,\ i(F_i, \Omega_{R_i}, K) = 1.$$

因此

$$i(F_i, \Omega_{R_i} \backslash \overline{\Omega}_{r_i}, K) = 1.$$

所以 F_i 在 $\Omega_{R_i} \backslash \overline{\Omega}_{r_i}$ 中有一个不动点 u_i. 由引理 2.4 可知这个不动点 u_i 是问题 (1) 的解，并且满足

$a_i < r_i \leqslant \| u_i \| \leqslant b_i$.

所以，$\forall \lambda > \lambda_0$ 问题 (1) 有 n 个正解 $u_1, u_2, \cdots, u_n$，且

$$a_i < \sup_{t\in[0,1]} u_i(t) \leqslant b_i.$$

如果 $t_i < b_i$ 且充分接近 b_i，由 ε 的任意性可知结论依然成立.

例 3.2 取 $f(u(t)) = |\sin(u(t))| + |\cos(u(t))|$. 考虑边值问题

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) + \lambda(|\sin(u(t))| + \\ \quad |\cos(u(t))|) = 0,\ t \in [0,1], k \neq 0, \\ u'(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

可知 f 为 $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 的连续函数. 则存在两个正的点列

$$a_k = k\pi, b_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, a_k < b_k \leqslant a_{k+1} < b_{k+1}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

满足 $f(a_k) = 0, f(b_k) = 0$，并且在 (a_k, b_k) 上 $f(u) > 0$. 由定理 3.1 可得，存在 λ_0 使得对任意的 $\lambda \geqslant \lambda_0$，问题 (14) 有 n 个不同的解 $u_1, \cdots, u_n$，使得对每个 $k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 有

$$a_k < \sup_{t\in[0,1]} u_k(t) \leqslant b_k.$$

注 对充分大的 λ，让 $\| u_i \|$ 与 b_i 充分接近，对任意的 $\eta: 0 < \eta < \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{b_i - a_i\}$，存在 λ_1，使得对任意的 $\lambda \geqslant \lambda_1$，有 n 个不同的解 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 满足

$$(1-\eta) b_i < \sup_{t\in[0,1]} u_i(t) \leqslant b_i.$$

参考文献:

[1] Erbe L H, Hu S, Wang H. Multiple positive solution of some boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1994, 184: 640.

[2] Liu Z, Li F. Multiple positive solutions of nonlinear two-point value problems[J]. J Math Anal Appl, 1996, 203: 610.

[3] 吴红萍. 一类二阶边值问题 2 个正解的存在性 [J]. 甘肃科学学报, 2009, 21: 4.

[4] 陆静. 用格林函数法求解二阶微分方程边值问题 [J]. 太原师范学院学报: 自然科学版, 2011, 10: 32.

[5] Ma R, An Y. Uniqueness of positive solutions of a class of ODE with Robin boundary conditions[J]. Nonlinear Anal, 2005, 63: 273.

[6] Han X. Positive Solutions for a three-point boundary value problem [J]. Nonlinear Anal, 2007, 66: 679.

[7] Hu S, Wang H. Convex Solutions of BVP arising from Monge-Ampere equations [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2006, 16: 705.

[8] 白婧. 一类三阶非线性微分方程的奇周期解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52: 1217.

[9] 陈文斌, 李耀红. 一类高分数阶微分方程的积分边值问题的正解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 512.

[10] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. New York: Springer, 1995.

[11] 马如云. 非线性常微分方程非局部间题 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[12] 郭大均. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.