2017 年 9 月 四川大学学报(自然科学版) Sep. 2017
第 54 卷 第 5 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 54 No. 5

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2017.05.005

基于粒子群优化算法的期权波动率估计

何 光，龙宪军
(重庆工商大学数学与统计学院，重庆 400067)

摘 要：波动率是 Black-Scholes 公式中的一个重要参数，期权价格对它的变动非常敏感. 本文首先介绍了 Black-Scholes 期权定价公式，分析了波动率对期权定价的重要性. 然后，为了计算粒子位置和速度，本文根据全局最优位置的历史数据及变异操作，提出了一种基于全局最优位置修正的粒子群优化算法. 最后，本文在数值实验中运用修正的粒子群优化算法获得了基于期货合约的欧式看涨期权公式中波动率的估计值，并通过实验结果比较表明该算法具有更好的收敛性.

关键词：粒子群优化算法；波动率；变异操作；期权定价
中图分类号：O224 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2017)05-0925-04

Estimation of option's volatility based on particle swarm optimization algorithm

HE Guang, *LONG Xian-Jun*
(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Volatility is a critical parameter for option pricing. Option prices are very sensitive to volatility's fluctuation. In this paper, Black-Scholes option pricing formula is introduced, the importance of volatility in option pricing is analyzed. Then, to compute particle's position and velocity, a particle swarm optimization algorithm with adjustment of global best position is proposed according to the history data of global best positions and mutation operation. Finally, the algorithm is used to look for the approximate value of volatility in European call option on a futures contract in numerical experiments. By compared with related experiment results, the modified algorithm displays better in convergence.

Keywords: Particle swarm optimization algorithm; Volatility; Mutation Operation; option pricing

1 引 言

期权是金融机构中备受关注的一种金融衍生工具. 为在期权市场中探索出令人满意的投资领域，期权的定价问题受到了投资者、经济学家、应用数学家乃至物理学家的广泛关注. 1973 年，Black，Scholes[1] 和 Merton[2] 共同提出了著名的 Black-Scholes-Merton 模型. 该模型一个偏微分方程，根据方程的解析解可给出欧式期权定价的精确表达式. 此后，大量学者对该模型进行了改进和应用[3-8].

作为应用最广泛的期权定价模型，Black-Schole 模型具有五个重要参数：标的资产的价格、执行价格、到期时间、收益的无风险利率以及证券收益的波动率. 在这些参数中，波动率是期权定价一个关键因素. 它无法被直接观测到，却能够通过

收稿日期：2017-02-11
基金项目：国家自然科学基金(11471059)；重庆市科委项目基金(cstc2016jcyjA0564)；重庆市教委项目基金(KJ1500631)；重庆工商大学博士科研启动项目基金(2015-56-08)；重庆工商大学青年项目基金(1552004)
作者简介：何光(1981－)，男，博士，副教授，主要从事金融数学及优化算法的研究. E-mail：heguang6896@163.com.

一些计算手段进行估计.期权价格对波动率的波动非常敏感,因而有效地估计波动率在期权定价中格外重要.然而,在多数研究中波动率往往被设为常值,而实际上波动率是一个关于其他参数的非线性函数.目前,一些学者提出了用于估计波动率的数值搜索方法,如 Manaster 和 Koehler[9] 运用 Newton-Raphson 方法分析了波动率,然而其收敛性具有局限性.此外,Bruce 在文献[10]中表明遗传算法比那些基于积分的搜索技巧能更加有效地获得波动率的精确值.还有其他关于波动率的研究工作[11-12].

在已有的进化计算方法中,Kennedy 和 Eberhart[13] 提出的粒子群优化算法(PSO)因其程序简单、易于操作而得到了研究者们的广泛关注.PSO 算法在运行中只需较少的数据和程序代码.于是 PSO 算法逐渐被应用于估计期权的波动率,如 Lee 等在原始二进制粒子群优化算法[14] 基础上,提出了具有变异的二进制粒子群优化算法,并且应用改进算法估计了欧式期权的波动率,Zhao 等[15] 采用量子粒子群优化算法搜索了波动率的近似值.

受到已有研究的启发,本文引入变异操作,设计了一种基于粒子全局位置修正的粒子群优化算法,并通过仿真实验展现了修正算法的收敛优势.

2 问题描述

Black 和 Scholes 运用偏微分方程求解技巧给出了欧式看涨和看跌期权定价的数学解析公式.在期权模型中有以下几点假设:第一,股票价格服从几何布朗运动;第二,期权必须在到期日执行;第三,利率设定为常数;第四,股票进行连续交易,不含有股息和交易税;第五,市场是无摩擦的.选择期货合约的欧式看涨期权为研究对象.合约的当前价格记为 F,看涨期权的价格为 C,期权中的参数为:敲定价格、到期时间、波动率和无风险利率分别记为 X,τ,σ 和 r.于是,基于期货合约的看涨期权定价公式如下:

$$C=\mathrm{e}^{-r\tau}[F\cdot N(d_1)-XN(d_2)],$$

其中 $N(x)$ 为标准正态分布函数,d_1 和 d_2 的表达式分别为:

$$d_1=\frac{\ln(\frac{F}{X})+\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}.$$

在模型分析时,往往将无风险利率和标的股票价格的波动率设定为常数.作为模型中的重要参数,波动率 σ 根据较长的时间段和无重复的数据呈现不同的结果.有经验的期权交易人不仅分析现在的波动率,还会从历史数据中判断这些值与期望值之间的关系.因此,将波动率考虑为一个变量更为合理,需要通过实验数据的分析来估计.

在评价波动率的估计值时,需要考虑期权价格的数值近似解和真实价格之间的差异.于是,选择估计值和真实值之间差值的绝对值作为优化问题的目标函数,而优化模型的目的就是寻找该函数的最小值.具体模型如下:

$$(\mathrm{M}_1)\ \min\ |f(x)-f_0|\quad \mathrm{s.t.}\ \ x\in(0,1),$$

其中,x 为波动率,$f(x)$ 表示欧式看涨期权价格公式,f_0 为当前合约的真实期权价格.

3 算法分析

在经典的粒子群优化算法中,假设搜索空间为 D 维,种群的粒子个数为 n,第 i 个粒子的位置以及速度分别是 $X_i=(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{iD})$ 和 $V_i=(V_{i1},V_{i2},\cdots,V_{iD})$,同时第 i 个粒子的个体极值以及全局极值分别为 $P_i=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{iD})$ 和 $P_g=(P_{g1},P_{g2},\cdots,P_{gD})$.在迭代过程中,粒子通过以下公式来更新自身的速度和位置:

$$V_i(t+1)=wV_i(t)+c_1r_1(P_i(t)-X_i(t))+c_2r_2(P_g(t)-X_i(t)) \tag{1}$$

$$X_i(t+1)=X_i(t)+V_i(t+1) \tag{2}$$

其中 w 表示惯性权重,c_1 和 c_2 表示加速因子,r_1 和 r_2 表示 0 到 1 之间均匀分布的随机数.

在修正的 PSO 算法(记为 PSO1 算法)中,对粒子群体的全局最优位置进行以下改动.首先,用 mbest 替换 gbest,mbest 表示以前迭代过程中所有 gbest 的平均值,公式为

$$mbest=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g_i(t) \tag{3}$$

然后,对 gbest 进行变异操作:

if $r_0\leqslant P_0$

for $k=1$ to D_0

$d=\lceil r_{k1}\cdot D\rceil$;$P_{gd}=L+r_{k2}\cdot(U-L)$;

end

end (4)

其中 r_0,r_{k1} 和 r_{k2} 为(0,1)上的随机数,P_0 和 D_0 分别表示变异概率和变异维数,$\lceil\cdot\rceil$ 表示向上取整,U 和 L 分别为 P_{gd} 的最大和最小值.

PSO1 算法的具体流程如下.

第一步,初始化所有粒子的速度和位置;

第二步,计算当前每个粒子的适应值;

第三步,更新每个粒子的 pbest,将最好的 pbest 与当前 gbest 比较,保留较好的为 gbest;

第四步,通过公式(3)和(4)更新 gbest;

第五步,运用公式(1)和(2)更新粒子的速度和位置;

第六步,满足停止条件,搜索结束,输出结果;否则进入第二步.

在接下来的实验中,$c_1 = c_2 = 2$,w 采用线性递减策略,变异维数 $D_0 = 5$,变异概率 P_0 定义为:

$$P_0 = P_{\min} + \frac{T-t}{T-1}(P_{\max} - P_{\min}),$$

其中 $P_{\max}$ 和 $P_{\min}$ 分别为 P_0 最大和最小值.

4　数值实验

数值实验中采用 PSO1 算法求解模型(M_1),估计期货合约的看涨期权中的波动率. 为比较不同算法的优化结果,选择了原始的 BPSO 算法(记为 BPSO1)及文献[14]提出的基于变异操作的二进制粒子群优化算法(Binary particle swarm optimization algorithm with bit change mutation,记为 BPSO2)与 PSO1 进行对比实验. 其中 BPSO1 和 BPSO2 两种算法中设定二进制编码为 20 位,PSO1 算法中选择一维实数编码. 根据种群规模 n 和最大迭代次数 T 的设定,考虑四种不同的组合方式进行运算. 所有算法的程序重复运行 20 次,然后取平均值.

表 1　三种算法优化结果

Tab. 1　Optimization results for three algorithms

组合	n	T	BPSO1	BPSO2	PSO1
S_1	10	50	0.4934	0.4354	0.0011
S_2	10	100	0.2754	0.2020	6.2804e-05
S_3	20	50	0.2317	0.1838	9.0594e-04
S_4	20	100	0.1123	0.1290	1.7470e-05

在表 1 中,S_1,S_2,S_3 和 S_4 分别表示粒子总数与迭代次数取不同参数时的情况. 从优化结果可见,在所有组合中 PSO1 算法计算的数值明显比 BPSO1 和 BPSO2 算法更小,表明其搜索能力更强. 随着种群规模和迭代次数的增加,三种算法的结果均得到了改善,而 PSO1 算法的优化效率更高. 另外,BPSO2 算法由于运用变异操作提高了种群的多样性,比 BPSO1 算法优化效果更佳.

表 2　算法 BPSO2 与 PSO1 的优化结果

Tab. 2　Optimization results for BPSO2 and PSO1 algorithms

组合	算法	均值	方差
S_1	BPSO2	0.4354	0.1117
	PSO1	0.0011	1.9081e-06
S_2	BPSO2	0.2020	0.0340
	PSO1	6.2804e-05	9.7440e-09
S_3	BPSO2	0.1838	0.0299
	PSO1	9.0594e-04	1.1935e-06
S_4	BPSO2	0.1290	0.0121
	PSO1	1.7470e-05	3.1853e-10

表 2 中数据显示,在组合 S_4 下两种算法的各项指标都是表现最好的. 与 BPSO2 算法比较,PSO1 算法在均值方面结果更佳,同时方差值也远小于 BPSO2 算法的结果,表明改进算法的优化值具有很好的稳定性.

图 1 展示了两种算法获得的波动率估计值的迭代过程,选择种群规模为 20,迭代次数为 100 时的情况. 图形表明,PSO1 算法比 BPSO2 算法能够更加迅速、更加稳定地寻找到波动率的最佳估计值.

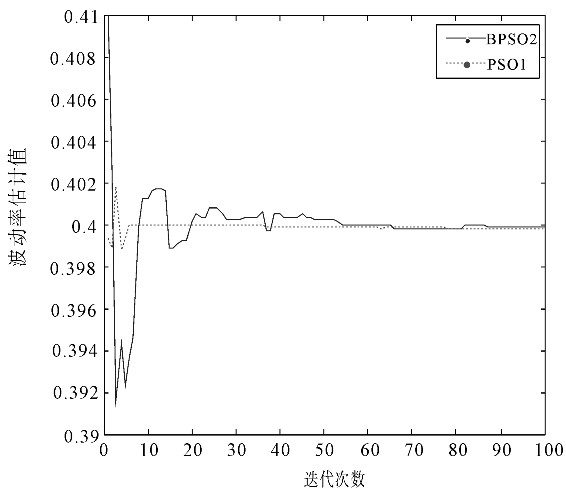

图 1　两种算法的波动率估计值

Fig. 1　Approximate values of volatility for two algorithms

最后,将三种算法得到的波动率的估计结果进行比较. 因为 PSO1 算法的优化效果最好,其估计值与当前期货期权的波动率最接近,于是波动率 $\sigma = 0.3999$. 在表 3 中,BPSO1 和 BPSO2 均在组合 S_4 下寻找到最靠近真实值的估计结果. 同时,PSO1 算法在各种组合下都获得同一最优值,显示出其优秀的搜索性能和稳定性.

表3 三种算法的波动率估计值

Tab. 3 Approximate values of volatility for three algorithms

组合	BPSO1	BPSO2	PSO1
S_1	0.3994	0.4012	0.3999
S_2	0.3994	0.4003	0.3999
S_3	0.3997	0.3996	0.3999
S_4	0.3997	0.4003	0.3999

5 结 语

为提高收敛速度和计算精度,我们在迭代过程中考虑了全局最优的历史数据,同时引入了遗传算法中的变异操作,设计出一种基于全局位置修正的粒子群优化算法(PSO1).在仿真实验中,将PSO1算法用于估计基于期货合约的欧式看涨期权的重要参数—波动率,并与已有的粒子群优化算法进行了比较,该算法表现出更好的精确性和收敛性.另外,如何提高算法性能以及在期权定价中的进一步应用将是接下来的研究方向.

参考文献:

[1] Black F S, Scholes M S. The pricing of options and corporate liabilities [J]. J Econ, 1973,81: 637.

[2] Merton R C. Theory of rational option pricing [J]. Bell J Econ, 2014, 4: 141.

[3] Bouchaud J P, Iori G, Sornette D. Real-world options: smile and residual risk [J]. Physics, 1995, 9: 61.

[4] Aurell E, Sindyankin S. Pricing risky options simply [J]. Int J Theor Appl Finance, 1998, 1: 1.

[5] Avellaneda M, Levy A, Paras A. Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities [J]. Appl Math Finance, 1995, 1: 73.

[6] Hofmann N, Platen E, Schweizer M. Option pricing under incompleteness and stochastic volatility [J]. Math Finance, 1992, 2: 153.

[7] Avellaneda M, Paras A. Managing the volatility risk of portfolios of derivative securities: the Langrangian uncertain volatility model [J]. Appl Math Finance, 1996, 1: 21.

[8] Schweizer M. Variance-optimal hedging in discrete time [J]. Math Oper Res, 1995, 20: 1.

[9] Manaster S, Koehler G. The calculation of implied variances from the Black-Scholes model: a note [J]. J Finance, 1982, 37: 227.

[10] Bruce K. Black-Scholes option pricing via genetic algorithms[J]. Appl Econ Lett, 2000, 7: 129.

[11] Krausz J. Option parameter analysis and market efficiency tests: a simultaneous solution approach [J]. Appl Econ, 1985, 17: 885.

[12] Chu S, Freund S. Volatility estimation for stock index options: a GARCH approach [J]. Quart Rev Econ Finance, 1996, 36: 431.

[13] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization [C]//Proceedings of IEEE international Conference on neural networks. New York: IEEE Press, 1995: 1942.

[14] Kennedy J, Eberhart R C. A discrete binary version of the particle swarm algorithm[C]//Proceedings of IEEE international Conference on syetem, Management and cybernetics, New York: IEEE Press, 1997: 4104.

[15] Zhao X, Sun J, Xu W B. Application of quantum behaved particle swarm optimization in parameter estimation of option pricing [C]//Symposium distributed computing and applications to business, engineering and science. New York: IEEE Press, 2010: 10.