2017 年 11 月 四川大学学报(自然科学版) Nov. 2017
第 54 卷 第 6 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 54 No. 6

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.06.004

耦合不动点定理在偏序度量空间中的推广

马 瑾，杨 和
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘 要：本文在偏序度量空间中建立了一个新的压缩条件，证明了新的耦合重合点定理和耦合共同不动点定理. 然后，本文运用所证得的定理证明了分数阶 Volterra 积分方程解的存在唯一性.

关键词：混合单调算子；偏序度量空间；耦合重合点；耦合共同不动点；积分方程
中图分类号：O177.91 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2017)06-1146-07

Generalied coupled fixed point theorem in partially ordered metric spaces

MA Jin, *YANG He*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: We first establish a new contractive condition and prove new coupled coincidence and coupled common fixed point theorems in partially ordered metric spaces. Then we apply the new coupled common fixed point theorem to prove the existence and uniqueness of solutions of fractional Volterra integral equations.

Keywords: Mixed monotone operator; Partially ordered metric spaces; Coupled coincidence point; Coupled common fixed point; Integral equations
(2010 MSC 34A12, 34B18)

1 引 言

混合单调算子是一类重要算子，在非线性泛函分析等方面有重要应用. 自 1987 年郭大钧和 Lakshmikantham 在文献 [1] 中提出混合单调算子及耦合不动点的概念以来，许多作者通过推广和改进文献 [1] 中不动点定理的压缩条件获得了一些重要的不动点定理[2-9]. 这些不动点定理在微分方程初值问题、周期边值问题及积分方程解的存在性等方面都有广泛应用.

2 预备知识及主要结果

设 X 是一个非空集合，在 X 上定义距离 d，使得 (X,d) 成为一个度量空间.

定义 2.1 设 X 是非空集合，映射 $F:X\to X$. 若存在 $x\in X$，使得 $x=F(x)$，则称 x 是映射 F 的不动点.

定义 2.2 设 X 是度量空间. 称 $F:X\to X$ 是压缩映射，如果存在常数 $k\in(0,1)$，使得

$$d(Fx,Fy)\leqslant kd(x,y),\forall x,y\in X \tag{1}$$

Banach 压缩映射原理是泛函分析中的一个最常用、最重要的不动点定理. 其叙述如下：

定理 2.3[2] 设 X 是完备度量空间，$F:X\to X$ 是压缩映射，则 F 在 X 上有且只有一个不动点.

文献 [3] 定义了一个连续不减函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，满足 $\varphi(t)=0\Leftrightarrow t=0$，并通过将压缩条件 (1) 改进为

收稿日期：2017-03-31
基金项目：国家自然科学基金(11661071)
作者简介：马瑾(1995－)，女，甘肃武威人，硕士研究生，主要研究方向为非线性泛函分析. E-mail：majin950512@163.com
通信作者：杨和. E-mail：yanghe256@163.com

$$\varphi(d(Fx,Fy)) \leqslant k\varphi(d(x,y)),\quad k \in (0,1) \tag{2}$$

证明了 F 在 X 上不动点的存在唯一性. 若取 $\varphi(t)=t$，则压缩条件 (2) 转化为条件 (1).

文献[4～8]在度量空间 (X,d) 中引入偏序"$\leqslant$",使 $(X,d,\leqslant)$ 成为偏序度量空间. 他们在偏序度量空间 $(X,d,\leqslant)$ 中进一步研究了耦合不动点、耦合重合点及耦合共同不动点的存在性和唯一性.

定义 2.4[4]　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集. 映射 F: $X\times X\to X$. 若 F 满足：$\forall x,y\in X$，有

$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y),x_1,x_2 \in X,$$
$$y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow F(x,y_1)\geqslant F(x,y_2),y_1,y_2 \in X,$$

则称 F 是混合单调的.

定义 2.5[6,7]　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集. 若映射 $F:X\times X\to X,g:X\to X$ 满足：$\forall x,y\in X$，有

$$g(x_1)\leqslant g(x_2)\Rightarrow F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y),\quad x_1,x_2\in X,$$
$$g(y_1)\leqslant g(y_2)\Rightarrow F(x,y_1)\geqslant F(x,y_2),y_1,y_2\in X,$$

则称 F 关于 g 是混合单调的.

注 1　显然，当 g 为恒等映射时，F 关于 g 混合单调退化为 F 混合单调. 例如：$F(x,y)=1+x^2+y^2,g(x)=|x|$.

定义 2.6[6,7]　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集. 若映射 $F:X\times X\to X,g:X\to X$ 满足：$\forall x,y\in X$，有

$$g(F(x,y))=F(g(x),g(y)),$$

则称映射 F 与 g 是可互换的.

定义 2.7[6,7]　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集. 若映射 $F:X\times X\to X,g:X\to X$ 满足：$\forall x,y\in X$，有

$$F(x,y)=g(x),F(y,x)=g(y),$$

则称 (x,y) 是 F 与 g 的耦合重合点. 进一步，如果

$$x=g(x)=F(x,y),\ y=g(y)=F(y,x),$$

则称 (x,y) 是 F 与 g 的耦合共同不动点.

定义 2.8[4]　设 X 是非空集合，映射 $F:X\times X\to X$. 若存在 $(x,y)\in X\times X$，使得

$$F(x,y)=x,F(y,x)=y,$$

则称 (x,y) 是 F 的耦合不动点. 进一步，如果 $x=y$，即 $x=F(x,x)$，则称 x 是映射 F 的不动点.

Bhaskar 和 Lakshmikantham[4]在偏序度量空间中将压缩条件 (1) 改进为

$$d(F(x,y),F(u,v))\leqslant \frac{k}{2}[d(x,u)+d(y,v)],k\in[0,1) \tag{3}$$

(其中 $x,y,u,v\in X$，满足 $x\geqslant u,y\leqslant v$) 并证明了耦合不动点的存在性. 随后，Brinde[5]将压缩条件 (3) 进一步改进为

$$d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leqslant k[d(x,u)+d(y,v)],k\in[0,1) \tag{4}$$

(其中 $x,y,u,v\in X$，满足 $x\geqslant u,y\leqslant v$) 并证明了耦合不动点的存在性定理. 最近，Luong 和 Thuan[8] 通过引入一类函数 $\Theta=\{\theta:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,1):\ \forall\ \{t_n\}_{n=1}^{\infty},\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta(t_n,s_n)=1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}s_n=0\}$，将压缩条件 (4) 作了进一步推广和改进，并证明了如下不动点定理：

定理 2.9　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集，(X,d) 是完备度量空间. 又设连续映射 $F:X\times X\to X$ 是混合单调的，且对任意 $x,y,u,v\in X$，有

$$d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leqslant \theta(d(x,u),d(y,v))(d(x,u)+d(y,v)) \tag{5}$$

其中 $\theta\in\Theta,x\geqslant u,y\leqslant v$. 假设存在 $x_0,y_0\in X$，使得 $x_0\leqslant F(x_0,y_0)$，$y_0\geqslant F(y_0,x_0)$. 则存在 $x,y\in X$，使得

$$x=F(x,y),\ y=F(y,x),$$

也就是说，映射 F 在 X 上存在耦合不动点.

显然，条件 (5) 很大程度上推广了条件 (3) 和 (4). 受上述文献的启发，本文定义两个连续映射 $F:X\times X\to X$ 和 $g:X\to X$，满足 $F(X\times X)\subset g(X)$，使得 F 关于 g 是混合单调的，从则将定理 2.9 中的条件 (5) 推广到了更一般的形式，并证明了更加广泛的不动点定理. 本文的主要结论如下：

定理 2.10　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集，(X,d) 是完备度量空间. 又设两个连续映射 $F:X\times X\to X$ 和 $g:X\to X$，满足 $F(X\times X)\subset g(X)$，使得 F 关于 g 是混合单调的. 设对任意 $x,y,u,v\in X$，有

$$d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leqslant \theta(d(g(x),g(u)),d(g(y),g(v)))(d(g(x),g(u))+d(g(y),g(v))) \tag{6}$$

其中 $\theta\in\Theta,g(x)\leqslant g(u),g(y)\geqslant g(v)$. 又假设 F 与 g 可互换，且存在 $x_0,y_0\in X$，使得

$$g(x_0)\leqslant F(x_0,y_0),g(y_0)\geqslant F(y_0,x_0) \tag{7}$$

则存在 $x^*, y^* \in X$, 使得

$$g(x^*)=F(x^*,y^*), g(y^*)=F(y^*,x^*),$$

也就是说, F 与 g 有耦合重合点.

注2 在定理2.10中取 $g(x)\equiv x$, 即映射 g 是恒等映射, 则定理2.10就退化成了定理2.9.

令 $\Omega=\{\beta:[0,+\infty)\to[0,1): \forall \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta(t_n)=1$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0\}$. 在定理2.10中取 $\theta(t_1,t_2)=\beta(t_1+t_2)$, 可得到下面的推论:

推论2.11 设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, 且具有下列性质

(1) 如果点列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则 $x_n\leqslant x(n=1,2,\cdots)$;

(2) 如果点列 $\{y_n\}$ 满足 $y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n\geqslant\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$, 则 $y_n\geqslant y(n=1,2,\cdots)$.

又设 (X,d) 是完备度量空间, $F:X\times X\to X$ 和 $g:X\to X$ 满足 $F(X\times X)\subset g(X)$, 使得 F 关于 g 是混合单调的. 设对任意 $x,y,u,v\in X$, 有

$$d(F(x,y),F(u,v))+ d(F(y,x),F(v,u))\leqslant \beta(d(g(x),g(u))+d(g(y),g(v))) (d(g(x),g(u))+d(g(y),g(v))),$$

其中 $\beta\in\Omega$, g 连续且满足 $g(x)\leqslant g(u)$, $g(y)\geqslant g(v)$. 假设 F 与 g 是可互换的, 且存在 $x_0,y_0\in X$, 使得

$$g(x_0)\leqslant F(x_0,y_0), g(y_0)\geqslant F(y_0,x_0),$$

则存在 $x^*,y^*\in X$, 使得

$$g(x^*)=F(x^*,y^*), g(y^*)=F(y^*,x^*),$$

也就是说, F 与 g 有耦合重合点.

注3 在推论2.11中, 当 $\beta(t)=\dfrac{k}{2}$, $k\in[0,1)$, $g(x)\equiv x$ 时, 推论就退化成了文献[4]中定理2.2. 特别地, 取 $\beta(t)=k\in[0,1)$. 则推论2.11是对文献[8]中推论2.4的推广.

定理2.12 假设定理2.10中所有条件均成立, 且对任意 $(x^*,y^*),(\bar{x},\bar{y})\in X\times X$, 存在 $(u,v)\in X\times X$, 使得 $(F(u,v),F(v,u))$ 与 $(F(x^*,y^*),F(y^*,x^*))$ 和 $(F(\bar{x},\bar{y}),F(\bar{y},\bar{x}))$ 都是可比较的. 则 F 与 g 有唯一耦合共同不动点, 即存在 $(z_1,z_2)\in X\times X$, 使得

$$z_1=g(z_1)=F(z_1,z_2),$$
$$z_2=g(z_2)=F(z_2,z_1).$$

3 主要结果的证明

定理2.10的证明 因为(7)式成立, 所以存在 $x_0,y_0\in X$, 使得 $g(x_0)\leqslant F(x_0,y_0)$, $g(y_0)\geqslant F(y_0,x_0)$. 又因为 $F(X\times X)\subset g(X)$, 则存在 $x_1,y_1\in X$, 使得 $g(x_1)=F(x_0,y_0)$, $g(y_1)=F(y_0,x_0)$. 进一步, 存在 $x_n,y_n\in X$, 使得

$$g(x_{n+1})=F(x_n,y_n), g(y_{n+1})= F(y_n,x_n), n=0,1,2,\cdots \tag{8}$$

我们首先用数学归纳法证明

$$g(x_n)\leqslant g(x_{n+1}), g(y_n)\geqslant g(y_{n+1}), n=0,1,2,\cdots \tag{9}$$

成立. 当 $n=0$ 时, $g(x_0)\leqslant g(x_1)$, $g(y_0)\geqslant g(y_1)$. 假设当 $n=k$ 时结论亦成立, 即

$$g(x_k)\leqslant g(x_{k+1}), g(y_k)\geqslant g(y_{k+1}).$$

则当 $n=k+1$ 时, 由于 F 关于 g 是混合单调的, 有

$$g(x_{k+1})=F(x_k,y_k)\leqslant F(x_{k+1},y_k)\leqslant F(x_{k+1},y_{k+1})=g(x_{k+2}).$$

故 $g(x_{k+1})\leqslant g(x_{k+2})$, 即当 $n=k+1$ 时结论也成立. 综上, $g(x_n)\leqslant g(x_{n+1})$. 同理, $g(y_n)\geqslant g(y_{n+1})$ 成立, 即(9)式成立.

现在考虑一个非负序列 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$. 令

$$d(g(x_{n+1}),g(x_n))+d(g(y_{n+1}), g(y_n))\triangleq\delta_{n+1}, n=0,1,2,\cdots \tag{10}$$

在(6)式中令 $x=x_n$, $y=y_n$, $u=x_{n-1}$, $v=y_{n-1}$. 则由(8),(10)式可将(6)式的左边变成

$$d(F(x_n,y_n),F(x_{n-1},y_{n-1}))+ d(F(y_n,x_n),F(y_{n-1},x_{n-1}))= d(g(x_{n+1}),g(x_n))+d(g(y_{n+1}), g(y_n))=\delta_{n+1},$$

右边变成

$$\theta(d(g(x),g(u)),d(g(y), g(v)))(d(g(x),g(u))+ d(g(y),g(v)))= \theta(d(g(x_n),g(x_{n-1})),d(g(y_n), g(y_{n-1})))(d(g(x_n),g(x_{n-1}))+ d(g(y_n),g(y_{n-1}))).$$

由 θ 的定义, (6)式可变成

$$d(g(x_{n+1}),g(x_n))+d(g(y_{n+1}),g(y_n))\leqslant \theta(d(g(x_n),g(x_{n-1})),d(g(y_n),g(y_{n-1}))) (d(g(x_n),g(x_{n-1}))+d(g(y_n),g(y_{n-1})))\leqslant d(g(x_n),g(x_{n-1}))+d(g(y_n),g(y_{n-1})) \tag{11}$$

由(11)式可知, 序列 $\{\delta_n\}$ 是单调不增的. 设存在 $\delta\geqslant 0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=\delta$. 下面用反证法证明 $\delta=0$.

假设 $\delta>0$. 由(11)式, 有

$$\frac{d(g(x_{n+1}),g(x_n))+d(g(y_{n+1}),g(y_n))}{d(g(x_n),g(x_{n-1}))+d(g(y_n),g(y_{n-1}))}\leqslant \theta(d(g(x_n),g(x_{n-1})),d(g(y_n),g(y_{n-1})))<1.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\theta(d(g(x_n),g(x_{n-1})),d(g(y_n),g(y_{n-1})))=1.$$

由 $\theta\in\Theta$ 的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}d(g(x_n),g(x_{n-1}))=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}d(g(y_n),g(y_{n-1}))=0.$$

这与 $\delta>0$ 矛盾！故假设不成立，即

$$\lim_{n\to\infty}(d(g(x_{n+1}),g(x_n))+d(g(y_{n+1}),g(y_n)))=0.$$

下面证明序列 $\{g(x_n)\}$，$\{g(y_n)\}$ 为 (X,d) 中的 Cauchy 列．假设序列 $\{g(x_n)\}$，$\{g(y_n)\}$ 中至少有一个不是 Cauchy 列．则存在 $\varepsilon_0>0$ 及子列 $\{g(x_{n_k})\}$，$\{g(x_{m_k})\}$，$\{g(y_{n_k})\}$，$\{g(y_{m_k})\}$，使得当 $n_k>m_k\geqslant k$ 时，有

$$d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k}))\geqslant\varepsilon_0,k=1,2,\cdots \tag{12}$$

取 n_k 为满足上式的最小正整数．则

$$d(g(x_{n_k-1}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k-1}),g(y_{m_k}))<\varepsilon_0 \tag{13}$$

由 (12),(13) 式及三角不等式可得

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\leqslant r_k:=&d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k}))\leqslant\\&d(g(x_{n_k}),g(x_{n_k-1}))+d(g(y_{n_k}),g(y_{n_k-1}))+\\&d(g(x_{n_k-1}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k-1}),g(y_{m_k}))<\\&d(g(x_{n_k}),g(x_{n_k-1}))+d(g(y_{n_k}),g(y_{n_k-1}))+\varepsilon_0.\end{aligned}$$

上述不等式两边同时取极限得

$$\lim_{n\to\infty}r_k=\lim_{n\to\infty}(d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k})))=\varepsilon_0 \tag{14}$$

再由三角不等式可得

$$\begin{aligned}r_k=&d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k}))\leqslant\\&d(g(x_{n_k}),g(x_{n_k+1}))+d(g(x_{n_k+1}),g(x_{m_k}))+\\&d(g(y_{n_k}),g(y_{n_k+1}))+d(g(y_{n_k+1}),g(y_{m_k}))=\\&\delta_{n_k+1}+d(g(x_{n_k+1}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k+1}),g(y_{m_k}))=\\&\delta_{n_k+1}+\delta_{m_k+1}+d(g(x_{n_k+1}),g(x_{m_k+1}))+d(g(y_{n_k+1}),g(y_{m_k+1})).\end{aligned}$$

因为 $n_k>m_k\geqslant k$，由(9)式可知 $g(x_{n_k})\geqslant g(x_{m_k})$，$g(y_{n_k})\leqslant g(y_{m_k})$．于是

$$\begin{aligned}&d(g(x_{n_k+1}),g(x_{m_k+1}))+d(g(y_{n_k+1}),g(y_{m_k+1}))=\\&d(F(x_{n_k},y_{n_k}),F(x_{m_k},y_{m_k}))+d(F(y_{n_k},x_{n_k}),F(y_{m_k},x_{m_k}))\leqslant\\&\theta(d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k})),d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k})))(d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k})))=\\&\theta(d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k})),d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k})))r_k.\end{aligned}$$

所以

$$r_k\leqslant\delta_{n_k+1}+\delta_{m_k+1}+\theta(d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k})),d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k})))r_k,$$

即

$$\frac{r_k-\delta_{n_k+1}-\delta_{m_k+1}}{r_k}\leqslant\theta(d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k})),d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k})))<1.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\theta(d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k})),d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k})))=1.$$

由 $\theta\in\Theta$ 的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k}))=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k}))=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(d(g(x_{n_k}),g(x_{m_k}))+d(g(y_{n_k}),g(y_{m_k})))=0.$$

这与 (14) 式矛盾！故假设不成立，即 $\{g(x_n)\}$，$\{g(y_n)\}$ 为 (X,d) 中的 Cauchy 列．从而存在 x^*，$y^*\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}g(x_n)=x^*,\lim_{n\to\infty}g(y_n)=y^*.$$

由 g 的连续性，有

$$\lim_{n\to\infty}g(g(x_n))=g(x^*),$$
$$\lim_{n\to\infty}g(g(y_n))=g(y^*).$$

又因为 F 与 g 是可互换的，所以

$$g(g(x_{n+1}))=g(F(x_n,y_n))=F(g(x_n),g(y_n))$$

且

$$g(g(y_{n+1}))=g(F(y_n,x_n))=F(g(y_n),g(x_n)).$$

最后我们证明

$$g(x^*)=F(x^*,y^*),g(y^*)=F(y^*,x^*).$$

因为 F 是连续映射，所以

$$g(x^*)=\lim_{n\to\infty}g(g(x_{n+1}))=\lim_{n\to\infty}F(g(x_n),g(y_n))=F(x^*,y^*),$$

$$g(y^*)=\lim_{n\to\infty}g(g(y_{n+1}))=\lim_{n\to\infty}F(g(y_n),g(x_n))=F(y^*,x^*),$$

即 (x^*,y^*) 是 F 与 g 的耦合重合点.

定理 2.12 的证明　由定理 2.10 的结论可知，F 和 g 有耦合重合点. 假设 (x^*,y^*), $(\bar{x},\bar{y})$ 都是 F 和 g 的耦合重合点.

首先，我们证明 $g(\bar{x})=g(x^*)$, $g(\bar{y})=g(y^*)$. $\forall\ (x^*,y^*)$, $(\bar{x},\bar{y})\in X\times X$，存在 $(u,v)\in X\times X$，使得 $(F(u,v),F(v,u))$ 与 $(F(x^*,y^*),F(y^*,x^*))$ 和 $(F(\bar{x},\bar{y}),F(\bar{y},\bar{x}))$ 都是可比较的. 与定理 2.10 的证明过程类似，令 $u=u_0$, $v=v_0$. 则存在 u_1, v_1 使得

$$g(u_1)=F(u_0,v_0),g(v_1)=F(v_0,u_0).$$

构造两个序列 $\{g(u_n)\}$, $\{g(v_n)\}$，使得

$$g(u_{n+1})=F(u_n,v_n),$$
$$g(v_{n+1})=F(v_n,u_n),n=0,1,2,\cdots \tag{15}$$

因为 $(F(u,v),F(v,u))=(g(u_1),g(v_1))$ 与 $(F(\bar{x},\bar{y}),F(\bar{y},\bar{x}))=(g(\bar{x}),g(\bar{y}))$ 是可比较的，所以我们可以假设 $g(\bar{x})\leqslant g(u_1)$, $g(\bar{y})\geqslant g(v_1)$. 由 (9),(15) 式可得

$$g(\bar{x})\leqslant g(u_n),g(\bar{y})\geqslant g(v_n),n=1,2,\cdots.$$

因此，由条件 (6) 及 θ 的定义有

$$\begin{aligned}&d(g(\bar{x}),g(u_{n+1}))+d(g(\bar{y}),g(v_{n+1}))=\\&\quad d(F(\bar{x},\bar{y}),F(u_n,v_n))+\\&\quad d(F(\bar{y},\bar{x}),F(v_n,u_n))\leqslant\\&\quad \theta(d(g(\bar{x}),g(u_n)),d(g(\bar{y}),\\&\qquad g(v_n)))(d(g(\bar{x}),g(u_n))+\\&\quad d(g(\bar{y}),g(v_n)))\leqslant\\&\quad d(g(\bar{x}),g(u_n))+d(g(\bar{y}),g(v_n))\end{aligned} \tag{16}$$

令

$$\delta_n\triangleq d(g(\bar{x}),g(u_n))+d(g(\bar{y}),g(v_n)).$$

则序列 $\{\delta_n\}$ 是非负不增序列. 设存在 $\delta\geqslant 0$，使得 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\delta$. 现在用反证法证明 $\delta=0$.

假设 $\delta>0$. 由 $\theta\in\Theta$ 的定义有

$$\lim_{n\to\infty}\theta(d(g(\bar{x}),g(u_n))+d(g(\bar{y}),g(v_n)))=\lambda,$$

其中 $\lambda\in[0,1)$. 由 (16) 式有

$$\lim_{n\to\infty}\delta_{n+1}=\delta=\lambda\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lambda\delta.$$

故 $\lambda=1$. 再由 $\theta\in\Theta$ 的定义有

$$\lim_{n\to\infty}d(g(\bar{x}),g(u_n))=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}d(g(\bar{y}),g(v_n))=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(d(g(\bar{x}),g(u_n))+d(g(\bar{y}),g(v_n)))=0.$$

这与 $\delta>0$ 矛盾！故假设不成立，即 $\delta=0$. 同理可得

$$\lim_{n\to\infty}d(g(x^*),g(u_n))=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}d(g(y^*),g(v_n))=0.$$

由上式及三角不等式可得

$$d(g(\bar{x}),g(x^*))\leqslant d((g(\bar{x}),g(u_n)))+d(g(x^*),g(u_n))\to 0,(n\to\infty),$$
$$d(g(\bar{y}),g(y^*))\leqslant d((g(\bar{y}),g(v_n)))+d(g(y^*),g(v_n))\to 0,(n\to\infty).$$

所以

$$g(\bar{x})=g(x^*),g(\bar{y})=g(y^*) \tag{17}$$

又因为 $g(\bar{x})=F(\bar{x},\bar{y})$, $g(\bar{y})=F(\bar{y},\bar{x})$，所以由定义 2.6 有

$$g(g(\bar{x}))=g(F(\bar{x},\bar{y}))=F(g(\bar{x}),g(\bar{y})),$$
$$g(g(\bar{y}))=g(F(\bar{y},\bar{x}))=F(g(\bar{y}),g(\bar{x})).$$

我们再证明 (z_1,z_2) 是 F 和 g 的耦合共同不动点. 令 $g(\bar{x})=z_1$, $g(\bar{y})=z_2$. 则 $g(z_1)=F(z_1,z_2)$, $g(z_2)=F(z_2,z_1)$. 因此，(z_1,z_2) 是 F 和 g 共有的耦合重合点. 所以可以用 z_1, z_2 来代替 (17) 式中的 x^*, y^*. 则有

$$g(\bar{x})=g(z_1),g(\bar{y})=g(z_2),$$

即

$$z_1=g(z_1)=F(z_1,z_2),$$
$$z_2=g(z_2)=F(z_2,z_1) \tag{18}$$

因此 (z_1,z_2) 是 F 和 g 的耦合共同不动点.

最后我们证明唯一性. 设 (p,q) 也是 F 和 g 的耦合的共同不动点. 由 (17) 和 (18) 式可得

$$p=g(p)=g(z_1)=z_1,$$
$$q=g(q)=g(z_2)=z_2.$$

证毕.

4 应 用

近年来，分数阶微积分受到了很多学者的关注，并得到了广泛应用[9-12]. 本节运用定理 2.12 来证明分数阶 Volterra 积分方程解的存在唯一性.

考虑分数阶积分方程

$$g(u(t))=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}(K_1(t,s)+K_2(t,s))(f_1(s,u(s))+$$

$$f_2(s,u(s)))\mathrm{d}s+h(t) \tag{19}$$

其中 $t\in I:=[a,b]$，$q\in(0,1)$ $f_1,f_2:J\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续，$K_1,K_2\in C(I\times I,\mathbf{R})$，$h\in C(I)$. 定义函数 $\eta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$\eta(t)<t$ 且 η 是单调不减函数，则函数 $\theta\in\Theta$ 为

$$\theta(t_1,t_2)=\frac{\eta(t_1)+\eta(t_2)}{t_1+t_2}.$$

为了证明方程 (19) 解的存在唯一性，引入下列假设条件：

(H_1) 函数 g 是 $C(I)$ 上的严格增函数；

(H_2) 函数 $K_1,K_2\in C(I\times I,\mathbf{R})$，且 $K_1(t,s)\geqslant 0$，$K_2(t,s)\leqslant 0$，$t,s\in I$；

(H_3) 对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，当 $x\geqslant y$ 时，存在 $\lambda>0$，$\mu>0$，对任意 $t\in I$ 有

$$0\leqslant f_1(t,x)-f_1(t,y)\leqslant\lambda\eta(g(x)-g(y))$$

且

$$-\mu\eta(g(x)-g(y))\leqslant f_2(t,x)-f_2(t,y)\leqslant 0.$$

定义 4.1　称 $(u,v)\in C(I)\times C(I)$ 是方程 (19) 的耦合上下解. 如果当 $u(t)\geqslant v(t)$ 时有

$$g(u(t))\geqslant \frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_1(t,s)(f_1(s,u(s))+f_2(s,v(s)))\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_2(t,s)(f_1(s,v(s))+f_2(s,u(s)))\mathrm{d}s+h(t),$$

且

$$g(v(t))\leqslant \frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_1(t,s)(f_1(s,v(s))+f_2(s,u(s)))\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_2(t,s)(f_1(s,u(s))+f_2(s,v(s)))\mathrm{d}s+h(t).$$

定理 4.2　假设条件(H_1)~(H_3)成立. 如果方程 (19) 有耦合上下解 (α,β) 且不等式

$$\frac{\lambda+\mu}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}(K_1(t,s)+|K_2(t,s)|)\mathrm{d}s\leqslant 1 \tag{20}$$

成立，则方程 (19) 存在唯一解.

证明　在 $C(I)$ 上定义偏序与度量

$$u\leqslant v\Leftrightarrow u(t)\leqslant v(t),\ d(u,v)=\sup_{t\in I}|u(t)-v(t)|,\ u,v\in C(I),\ \forall t\in I.$$

则 $(C(I),d)$ 是一个完备度量空间. 在 $C(I)\times C(I)$ 上定义偏序

$$(x,y)\leqslant(u,v)\Leftrightarrow x(t)\leqslant u(t),\ y(t)\geqslant v(t),\ (x,y),(u,v)\in C(I)\times C(I),\ \forall t\in I.$$

则对任意 $(x,y),(u,v)\in C(I)\times C(I)$ 有

$$(g(x),g(y))\leqslant(g(\max\{x,u\}),g(\min\{y,v\})) \tag{21}$$

$$(g(u),g(v))\leqslant(g(\max\{x,u\}),g(\min\{y,v\})) \tag{22}$$

故 $(\max\{x,u\},\min\{y,v\})$ 与 (x,y)，(u,v) 都是可比较的.

定义算子 $F:C(I)\times C(I)\to C(I)$，

$$F(x,y)(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_1(t,s)(f_1(s,x(s))+f_2(s,y(s)))\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_2(t,s)(f_1(s,y(s))+f_2(s,x(s)))\mathrm{d}s+h(t).$$

我们首先证明 F 关于 g 是混合单调的. 设 $x_1,x_2\in C(I)$ 满足 $g(x_1)\leqslant g(x_2)$. 由条件(H_1)可知，在 $C(I)$ 上有 $x_1(t)\leqslant x_2(t)$. 再由条件(H_2)和(H_3)有

$$F(x_1,y)(t)-F(x_2,y)(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_1(t,s)(f_1(s,x_1(s))-f_1(s,x_2(s)))\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_2(t,s)(f_2(s,x_1(s))-f_2(s,x_2(s)))\mathrm{d}s\leqslant 0,$$

即 $F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y)$. 同理，若 $y_1,y_2\in C(I)$ 满足 $g(y_1)\leqslant g(y_2)$，则 $F(x,y_1)\geqslant F(x,y_2)$. 由定义 2.6 可知 F 关于 g 是混合单调的. 根据 (21)，(22) 式可知，$(F(\max\{x,u\},\min\{y,v\}),F(\min\{y,v\},\max\{x,u\}))$ 与 $(F(x,y),F(y,x))$ 和 $(F(u,v),F(v,u))$ 都是可比较的.

下面证明算子 F 满足压缩条件(6). $\forall x,y,u,v\in C(I)$，使得 $g(x)\geqslant g(u)$，$g(y)\leqslant g(v)$. 由条件(H_3)可得

$$|F(x,y)(t)-F(u,v)(t)|=\Big|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_1(t,s)[(f_1(s,x(s))-f_1(s,u(s)))+(f_2(s,y(s))-f_2(s,v(s)))]\mathrm{d}s-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_2(t,s)[(f_1(s,v(s))-f_1(s,y(s)))+(f_2(s,u(s))-f_2(s,x(s)))]\mathrm{d}s\Big|\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a(t-s)^{q-1}K_1(t,s)|\lambda\eta(g(x(s))-g(u(s)))+\mu\eta(g(y(s))-g(v(s)))|\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a (t-s)^{q-1}\ |K_2(t,s)\|\lambda\eta(g(y(s))-g(v(s)))+\mu\eta(g(x(s))-g(u(s)))|\mathrm{d}s.$$

由于函数 η 是单调不减的，则有

$$\eta(g(x(s))-g(u(s)))\leqslant \eta(\sup_{s\in I}|g(x(s))-g(u(s))|)= \eta(d(g(x),g(u))),$$

$$\eta(g(y(s))-g(v(s)))\leqslant \eta(\sup_{s\in I}|g(y(s))-g(v(s))|)= \eta(d(g(y),g(v))).$$

所以

$$d(F(x,y),F(u,v))\leqslant \frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a (t-s)^{q-1}K_1(t,s)[\lambda\eta(d(g(x),g(u)))+\mu\eta(d(g(y),g(v)))]\mathrm{d}s+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a (t-s)^{q-1}|K_2(t,s)|[\lambda\eta(d(g(y),g(v)))+\mu\eta(d(g(x),g(u)))]\mathrm{d}s.$$

同理可得

$$d(F(y,x),F(v,u))\leqslant \frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a (t-s)^{q-1}K_1(t,s)[\lambda\eta(d(g(y),g(v)))+\mu\eta(d(g(x),g(u)))]\mathrm{d}s+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_b^a (t-s)^{q-1}|K_2(t,s)|[\lambda\eta(d(g(x),g(u)))+\mu\eta(d(g(y),g(v)))]\mathrm{d}s.$$

将上面两式相加,由（20）式及函数 η 的定义可得

$$d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leqslant \frac{\lambda+\mu}{\Gamma(q)}[\eta(d(g(x),g(u)))+\eta(d(g(y),g(v)))]\int_b^a (t-s)^{q-1}[K_1(t,s)+|K_2(t,s)|]\mathrm{d}s\leqslant \eta(d(g(x),g(u)))+\eta(d(g(y),g(v)))\leqslant \theta(d(g(x),g(u)),d(g(y),g(v)))(d(g(x),g(u))+d(g(y),g(v))).$$

所以 F 满足压缩条件(6). 设 (α,β) 为方程（19）的上下耦合解，则有

$$g(\alpha)\geqslant F(\alpha,\beta),g(\beta)\leqslant F(\beta,\alpha).$$

因而定理 2.12 的条件都满足. 由定理 2.12 可知，算子 F 在 $C(I)\times C(I)$ 上存在唯一耦合共同不动点，即方程（19）存在唯一解.

参考文献:

[1] Guo D, Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications [M]. Berlin/New York: Elsevier, 1987.

[2] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义 [M]. 北京：北京大学出版社，2005.

[3] Rhoades B E. Some theorems on weakly contractive maps [J]. Nonlinear Anal, 2001, 47: 2683.

[4] Bhaskar T G, Lakshmikantham V. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications [J]. Nonlinear Anal, 2006, 65: 1379.

[5] Brinde V. Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74: 7347.

[6] Lakshmikantham V, Ciric L. Coupled fixed point theorems for nonlinear contractives in partially ordered metric spaces and applications [J]. Nonlinear Anal, 2009, 70: 4341.

[7] Brinde V. Coupled coincidence point theorems for mixed monotone nonlinear operators [J]. Comput Math Appl, 2012, 64: 1770.

[8] Luong N V, Thuan N X. Coupled fixed points theorems for mixed monotone mappings and an application to integral equations [J]. Comput Math Appl, 2011, 62: 4238.

[9] 薛益民. 含积分边值条件的分数阶微分方程耦合系统正解的唯一性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016, 53: 1227.

[10] 张海燕，李耀红. 一类高分数阶微分方程的积分边值问题的正解 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016, 53: 512.

[11] 陈彩龙，韩晓玲. 分数阶常微分方程多点边值问题的上下解方法 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017, 54: 43.

[12] Dhage B C. Hybrid fixed point theory in partially ordered normed linear spaces and applications to fractional integral equations [J]. Differ Equ Appl, 2013, 5: 155.