2018 年 9 月　　四川大学学报(自然科学版)　　Sep. 2018
第 55 卷　第 5 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 55　No. 5

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.05.006

二阶三点边值问题对称正解的存在性及多解性

张　静，韩晓玲
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文运用 Krasnosel′skii 不动点定理方法研究了三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(t,u,u')=0, t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

对称正解的存在性和多解性，这里 $\alpha\in(0,1)$，$\eta\in(0,1)$，$f:[0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，且对任意 $(u,v)\in[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$，$f(\cdot,u,v)$ 在 $[0,1]$ 上对称.

关键词：三点边值问题；对称正解；不动点定理

中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)05-0935-06

Existence and multiplicity of symmetric positive solutions for second-order three-point boundary value problem

ZHANG Jing, *HAN Xiao-Ling*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: By using the fixed point theorem of Krasnosel′skii, we study the existence and multiplicity of symmetric positive solutions for the following second-order three-point boundary value problem

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(t,u,u')=0, t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=\alpha u(\eta), \end{cases}$$

where $\alpha\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$, $f:[0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,\infty)\to[0,\infty)$ is continuous, $f(\cdot,u,v)$ is symmetric on $[0,1]$ for all $(u,v)\in[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$.

Keywords: Three-point boundary value problem; Symmetric positive solution; Fixed point theorem
(2010 MSC 35J20, 35B38, 35B33)

1　引　言

常微分方程多点边值问题广泛应用于数学和物理领域[1-6]. 近几年来，大量文章致力于非线性三点边值问题对称正解的存在性研究[7-10]. 最近，文献[11]讨论了二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(t,u(t))=0, t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

对称正解的存在性和多解性，其中 $\alpha\in(0,1)$，$\eta\in(0,\frac{1}{2}]$，$a\in L^1(0,1)$ 在 $[0,1]$ 上非负对称，$f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足 Carathéodory 条件，且对任意 $u\in[0,\infty)$，$f(\cdot,u)$ 在 $[0,1]$ 上对称. 通过建立一个线性算子，该文利用线性算子的谱理论获得了上述边值问题对称正解的存在性和多解性.

基于以上工作，本文应用 Krasnosel′skii 不动点定理探讨如下二阶三点边值问题

收稿日期：2017-11-15
基金项目：国家自然科学基金(11561063)
作者简介：张静(1993－)，女，甘肃兰州人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：577600617@qq.com
通讯作者：韩晓玲. E-mail：hanxiaoling9@163.com

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(t,u,u')=0, t\in[0,1] \\ u(0)=u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

对称正解的存在性和多解性,其中 $\alpha\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$, $f:[0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,\infty)\to[0,\infty)$ 连续,且对任意 $(u,v)\in[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$, $f(\cdot,u,v)$ 在 $[0,1]$ 上对称.

假设

(A1) $f:[0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,\infty)\to[0,\infty)$ 连续,且对任意 $(u,v)\in[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$, $f(\cdot,u,v)$ 在 $[0,1]$ 上对称;

(A2) $a(t)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的对称非负连续函数,在 $(0,1)$ 的任何子区间上不恒为零,且

$$\int_0^1 a(t)\mathrm{d}t<+\infty.$$

本文的工作空间是 $C^1[0,1]$. 记

$$\|u\|=\max\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty\},$$

这里

$$\|u\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|,$$
$$\|u'\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|u'(t)|.$$

2 预备知识

定义 2.1 设 E 是实 Banach 空间,如果一个非空闭凸集 $K\subset E$ 满足以下条件:

(i) 若 $x\in K$, $\lambda>0$, 则 $\lambda x\in K$;

(ii) 若 $x\in K$, $-x\in K$, 则 $x=0$,

则 K 称为 E 中的一个锥.

定义 2.2 如果函数 $\omega(t)$ 满足

$$\omega(rt_1+(1-r)t_2)\geqslant r\omega(t_1)+(1-r)\omega(t_2),$$
$$r,t_1,t_2\in[0,1],$$

则称函数 $\omega(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的.

定义 2.3 如果函数 $\omega(t)$ 满足

$$\omega(t)=\omega(1-t), t\in[0,1],$$

则称函数 $\omega(t)$ 在 $[0,1]$ 上是对称的.

定义 2.4 如果 u^* 是边值问题(1)的一个正解,且在 $[0,1]$ 上是对称的,则称函数 u^* 称为边值问题(1)的一个对称正解.

引理 2.5 设 $\alpha,\eta\in(0,1)$, $y\in C^1[0,1]$ 在 $C^1[0,1]$ 上对称,则边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+y(t)=0, t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 G(\eta,s)y(s)\mathrm{d}s \tag{3}$$

其中

$$G(x,y)=\begin{cases} x(1-y), 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1, \\ y(1-x), 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

证明 由(2)式有 $u''(t)=-y(t)$, 及

$$u'(t)=-\int_0^t y(s)\mathrm{d}s+u'(0).$$

进而得

$$u(t)=-\int_0^t (t-s)y(s)\mathrm{d}s+u'(0)t+u(0).$$

由(2)式得

$$u(1)=-\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s+u'(0)+u(0)=u(0),$$
$$u(\eta)=-\int_0^\eta(\eta-s)y(s)\mathrm{d}s+u'(0)\eta+u(0)=\frac{1}{\alpha}u(0).$$

从而有

$$u'(0)=\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s,$$
$$u(0)=\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta(\eta-s)y(s)\mathrm{d}s.$$

故三点边值问题(2)有唯一解

$$u(t)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s+t\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta(\eta-s)y(s)\mathrm{d}s=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 G(\eta,s)y(s)\mathrm{d}s.$$

注 1 $\forall x,y\in[0,1]$, 有 $0\leqslant G(x,y)\leqslant G(y,y)$. $\forall y\in[0,1]$, $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$, 有 $G(x,y)\geqslant\frac{1}{4}G(y,y)$.

引理 2.6 设 $\alpha\in(0,1)$, $y\in C^1[0,1]$. 则边值问题(2)的唯一解 $u(t)$ 在 $[0,1]$ 上是非负的. $\forall t\in[0,1]$, 如果 $y(t)\not\equiv 0$, 则 $u(t)>0$.

证明 设 $y\in C^1[0,1]$. $\forall t\in[0,1]$, $u''(t)=-y(t)\leqslant 0$, 从而 $u(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的. 由(3)式有

$$u(0)=u(1)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta s(1-\eta)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\eta(1-s)y(s)\mathrm{d}s\geqslant 0.$$

$\forall t\in[0,1]$, $u(t)\geqslant 0$. 如果对任意 $t\in(0,1)$, $y(t)\not\equiv 0$, 则 $u(t)>0$. 证毕.

引理 2.7　设 $\alpha,\eta\in(0,1)$，$y(t)$ 在 $[0,1]$ 上对称. 则边值问题(2)的唯一解 $u(t)$ 在 $[0,1]$ 上对称.

证明　记

$$M=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta s(1-\eta)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\eta(1-s)y(s)\mathrm{d}s.$$

由(3)式得

$$\begin{aligned}u(1-t)&=\int_0^{1-t}tsy(s)\mathrm{d}s+\int_{1-t}^1(1-s)(1-t)y(s)\mathrm{d}s+M=\\&\int_1^t t(1-s)y(1-s)\mathrm{d}(1-s)+\int_t^0 s(1-t)y(1-s)\mathrm{d}(1-s)+M=\\&\int_t^1 t(1-s)y(s)\mathrm{d}s+\int_0^t s(1-t)y(s)\mathrm{d}s+M=u(t),\end{aligned}$$

即 $u(t)=u(1-t)$. 因此 $u(t)$ 在 $[0,1]$ 上是对称的. 证毕.

引理 2.8　$\forall\, y\in C^1[0,1]$，$\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$. 边值问题(2)的唯一对称解 $u(t)$ 满足

$$\min_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}u(t)\geqslant\frac{1}{4}\|u\| \tag{5}$$

证明　$\forall\, t\in[0,1]$，由(3)式和注 1 有

$$\begin{aligned}u(t)&=\int_0^1G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1G(\eta,s)y(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\int_0^1G(s,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1G(s,s)y(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此

$$\|u\|\leqslant\int_0^1G(s,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1G(s,s)y(s)\mathrm{d}s.$$

另一方面，对 $t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$，由(3)式和注 1 有

$$\begin{aligned}u(t)&=\int_0^1G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1G(\eta,s)y(s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\frac{1}{4}[\int_0^1G(s,s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1G(s,s)y(s)\mathrm{d}s]\geqslant\frac{1}{4}\|u\|.\end{aligned}$$

由 t 的任意性可知(5)式成立. 证毕.

定义积分算子 $T:K\to K$

$$Tu(t)=\int_0^1G(t,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1G(\eta,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s \tag{6}$$

则边值问题(1)有解 $u=u(t)$ 当且仅当 u 是算子 T 的不动点. 记 $K=\{u\in C^1[0,1]:u(t)\geqslant0,u(t)$ 在 $[0,1]$ 上是对称的凹函数且 $\min\limits_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}u(t)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|\}$. 则 K 是 E 中的非负锥.

引理 2.9　$T:K\to K$ 是全连续的.

证明　记

$$M^*=\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\eta s(1-\eta)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_\eta^1\eta(1-s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s.$$

由(6)式、(A1)和(A2)得

$$\begin{aligned}Tu(1-t)&=\int_0^{1-t}tsa(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\int_{1-t}^1(1-s)(1-t)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+M^*=\\&\int_1^t t(1-s)a(1-s)f(1-s,u,u')\mathrm{d}(1-s)+\int_t^0 s(1-t)a(1-s)f(1-s,u,u')\mathrm{d}(1-s)+M^*=\\&\int_t^1 t(1-s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\int_0^t s(1-t)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+M^*=Tu(t),\end{aligned}$$

即 $Tu(t)=Tu(1-t)$. 因此 $Tu(t)$ 在 $[0,1]$ 上是对称的，且 $Tu''(t)=-f(t,u,u')\leqslant0$. 所以 $Tu(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的. 由引理 2.8，容易验证当 $u\in K$ 时 $\min\limits_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}Tu(t)\geqslant\frac{1}{4}\|Tu\|$. 故 $TK\subset K$.

接下来证明 T 是全连续的. 设 $\Omega\subset K$ 是有界的，即存在 $R>0$，使得 $\Omega\subset\{u\in K\mid\|u\|\leqslant R\}$. 记

$$N=\max\{f(t,u,u')\mid t\in[0,1],u\in\Omega\}.$$

$\forall\, u\in\Omega$，

$$\begin{aligned}|Tu(t)|&=|\int_0^1G(t,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1G(\eta,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s|\leqslant\\&\int_0^1G(s,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1G(s,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{N}{1-\alpha}\int_0^1G(s,s)a(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

显然，$\frac{N}{1-\alpha}\int_0^1 G(s,s)a(s)\mathrm{d}s$ 是有界的. 因此 $T(\Omega)$ 是一致有界的. 进一步，$\forall u\in\Omega$ 和 $t\in[0,1]$，有

$$|(Tu)'(t)|=|-\int_0^t sa(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\int_t^1(1-s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s|\leqslant \int_0^1 sa(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\leqslant N(\int_0^1 sa(s)\mathrm{d}s+\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s)=N\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s.$$

因此 $\|(Tu)'\|\leqslant N\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s$. $\forall 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1$ 和 $u\in\Omega$，有

$$|Tu(t_1)-Tu(t_2)|=|\int_{t_1}^{t_2}(Tu)'(t)\mathrm{d}t|\leqslant \int_{t_1}^{t_2}|(Tu)'(t)|\mathrm{d}t\leqslant N\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\,|t_2-t_1|.$$

从而 $T(\Omega)$是等度连续的.

由于 f 是连续的，由控制收敛定理得到 T 在 Ω 中是连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理得到 $T:K\to K$ 是全连续的. 证毕.

定理 2.10[1] 设 E 是一个 Banach 空间，$K\subset E$ 是 E 中的一个锥. 假定 Ω_1,Ω_2 是 E 的两个开子集且 $0\in\Omega_1,\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$. 若全连续算子

$$T:K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\to K$$

满足

(i) $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$，或

(ii) $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$，

则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 上有一个不动点.

3 主要结果及其证明

记

$$f^0=\lim_{\|u\|\to0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u,u')}{u},$$

$$f_\infty=\lim_{\|u\|\to+\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u,u')}{u},$$

$$f_0=\lim_{\|u\|\to0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u,u')}{u},$$

$$f^\infty=\lim_{\|u\|\to+\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u,u')}{u},$$

且

$$\Lambda=(\max\{\frac{1}{16(1-\alpha)}\int_{\frac14}^{\frac34}G(s,s)a(s)\mathrm{d}s,\frac14\int_{\frac14}^{\frac34}(1-s)a(s)\mathrm{d}s,\frac14\int_{\frac14}^{\frac34}sa(s)\mathrm{d}s\})^{-1},$$

$$\Lambda^*=(\min\{\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 G(s,s)a(s)\mathrm{d}s,\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s,\int_0^1 sa(s)\mathrm{d}s\})^{-1}.$$

定理 3.1 设(A1),(A2)成立. 若

(H1) $f_0>\Lambda$ 和 $f^\infty<\Lambda^*$

成立，则边值问题(1)至少有一个对称正解.

证明 由范数的定义可得到

$$\|Tu\|=\max\{\|Tu\|_\infty,\|(Tu)'\|_\infty\}=\max\{\max_{t\in[0,1]}|Tu(t)|,(Tu)'(0),-(Tu)'(1)\}.$$

因为 $f_0>\Lambda$，故存在 $r>0$，使得对 $(t,u,u')\in[0,1]\times[0,r)\times(-\infty,\infty)$，有 $f(t,u,u')\geqslant\Lambda u$. 如果 $u\in K\cap\partial\Omega_1$，则由(5)、(6)式和注 1 有

$$\max_{t\in[0,1]}Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\geqslant \frac14\Lambda\int_{\frac14}^{\frac34}G(s,s)a(s)u\mathrm{d}s(\frac{1}{1-\alpha})\geqslant \frac{\Lambda\|u\|}{16(1-\alpha)}\int_{\frac14}^{\frac34}G(s,s)a(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

$$(Tu)'(0)=\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\geqslant \int_{\frac14}^{\frac34}(1-s)a(s)\Lambda u\mathrm{d}s\geqslant \frac14\Lambda\|u\|\int_{\frac14}^{\frac34}(1-s)a(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

$$-(Tu)'(1)=\int_0^1 sa(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\geqslant \int_{\frac14}^{\frac34}sa(s)\Lambda u\mathrm{d}s\geqslant \frac14\Lambda\|u\|\int_{\frac14}^{\frac34}sa(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

记

$$\Omega_1:=\{u:u\in E:\|u\|<r\}.$$

则

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1 \tag{7}$$

另一方面，因为 $f^\infty<\Lambda^*$，故存在 $\overline{R}>0$，使得对 $(t,u,u')\in[0,1]\times[0,r)\times(-\infty,\infty)$ 有 $f(t,u,u')\leqslant\Lambda^*u$. 令 $R>\max\{r,4\overline{R}\}$ 并记

$$\Omega_2:=\{u:u\in E:\|u\|<R\}.$$

如果 $u\in K\cap\partial\Omega_2$，则有

$$u(s)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|=\frac{1}{4}R>\overline{R}.$$

从而由(6)式和注 1 有

$$\max_{t\in[0,1]}Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\leqslant\frac{\Lambda^*}{1-\alpha}\int_0^1 G(s,s)a(s)u\mathrm{d}s\leqslant\frac{\Lambda^*\|u\|}{1-\alpha}\int_0^1 G(s,s)a(s)\mathrm{d}s\leqslant\|u\|.$$

$$(Tu)'(0)=\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\leqslant\Lambda^*\int_0^1(1-s)a(s)u\mathrm{d}s\leqslant\Lambda^*\|u\|\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\leqslant\|u\|.$$

$$-(Tu)'(1)=\int_0^1 sa(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\leqslant\Lambda^*\int_0^1 sa(s)u\mathrm{d}s\leqslant\Lambda^*\|u\|\int_0^1 sa(s)\mathrm{d}s\leqslant\|u\|.$$

则

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2 \tag{8}$$

故由(7)、(8)式和定理 2.10 知 T 在 $u^*\in K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点. 所以 u^* 是边值问题(1)的对称正解. 证毕.

相似的方法可得到下面的结论.

定理 3.2 设(A1),(A2)成立,若

(H2) $f^0<\Lambda^*$ 和 $f_\infty>\Lambda$,

则边值问题(1)至少有一个对称正解.

定理 3.3 设(A1),(A2)成立,若有

(H3) $f_0>\Lambda$ 和 $f_\infty>\Lambda$;

(H4) 存在一个常数 ρ 使得

$$f(t,u,u')\leqslant\Lambda^*\rho,(t,u,u')\in[0,1]\times[\frac{1}{4}\rho,\rho)\times(-\infty,\infty),$$

则边值问题(1)至少有两个对称正解 u_1 和 u_2，使得 $0<\|u_1\|<\rho<\|u_2\|$.

证明 由于 $f_0>\Lambda$，则存在 $r\in(0,\rho)$ 使得

$$f(t,u,u')\geqslant\Lambda u,(t,u,u')\in[0,1]\times[0,r)\times(-\infty,\infty).$$

记 $\Omega_r:=\{u:u\in E:\|u\|<r\}$. 对 $u\in K\cap\partial\Omega_r$,由(5)、(6)式和注 1 有

$$\max_{t\in[0,1]}Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\Lambda\int_{\frac14}^{\frac34}G(s,s)a(s)u\mathrm{d}s(\frac{1}{1-\alpha})\geqslant\frac{\Lambda\|u\|}{16(1-\alpha)}\int_{\frac14}^{\frac34}G(s,s)a(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

$$(Tu)'(0)\geqslant\int_{\frac14}^{\frac34}(1-s)a(s)\Lambda u\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\Lambda\|u\|\int_{\frac14}^{\frac34}(1-s)a(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

$$-(Tu)'(1)\geqslant\int_{\frac14}^{\frac34}sa(s)\Lambda u\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\Lambda\|u\|\int_{\frac14}^{\frac34}sa(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

因此

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_r \tag{9}$$

进一步,因为 $f_\infty>\Lambda$，故存在 $R\in(\rho,\infty)$，使得对 $(t,u,u')\in[0,1]\times[\frac{1}{4}R,\infty)\times(-\infty,\infty)$，有 $f(t,u,u')\geqslant\Lambda u$. 记

$$\Omega_R:=\{u:u\in E:\|u\|<R\}.$$

如果 $u\in K$，由(5)式有 $u(t)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|$. 故 $u\in K\cap\partial\Omega_R,t\in[0,1],u(t)\in[\frac{1}{4}R,R]$. 因此由(5)、(6)式和注 1 有

$$\max_{t\in[0,1]}Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\Lambda\int_{\frac14}^{\frac34}G(s,s)a(s)u\mathrm{d}s(\frac{1}{1-\alpha})\geqslant\frac{\Lambda\|u\|}{16(1-\alpha)}\int_{\frac14}^{\frac34}G(s,s)a(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

$$(Tu)'(0)\geqslant\int_{\frac14}^{\frac34}(1-s)a(s)\Lambda u\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\Lambda\|u\|\int_{\frac14}^{\frac34}(1-s)a(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

$$-(Tu)'(1)\geqslant\int_{\frac14}^{\frac34}sa(s)\Lambda u\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\Lambda\|u\|\int_{\frac14}^{\frac34}sa(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

因此

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_R \tag{10}$$

进一步,记

$$\Omega_\rho:=\{u:u\in E:\|u\|<\rho\}.$$

$\forall u\in K\cap\partial\Omega_\rho$,有 $u(t)\in[\frac{1}{4}\rho,\rho]$,$t\in[0,1]$. 由

(H4)和注 1 有

$$\max_{t\in[0,1]} Tu(t) = \int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u,u')\mathrm{d}s \leqslant \frac{\Lambda^*}{1-\alpha}\int_0^1 G(s,s)a(s)u\mathrm{d}s \leqslant \frac{\Lambda^*\ \|u\|}{1-\alpha}\int_0^1 G(s,s)a(s)\mathrm{d}s \leqslant \|u\|.$$

$$(Tu)'(0) \leqslant \Lambda^*\int_0^1 (1-s)a(s)u\mathrm{d}s \leqslant \Lambda^*\ \|u\|\int_0^1 (1-s)a(s)\mathrm{d}s \leqslant \|u\|.$$

$$-(Tu)'(1) \leqslant \Lambda^*\int_0^1 sa(s)u\mathrm{d}s \leqslant \Lambda^*\int_0^1 sa(s)\mathrm{d}s\,\|u\| \leqslant \|u\|.$$

因此

$$\|Tu\| \leqslant \|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_\rho \tag{11}$$

由于 $r<\rho<R$,从(9)~(11)式和定理 2.10 知算子 T 有不动点 $u_1\in K\cap(\overline{\Omega_\rho}\backslash\Omega_r)$ 和 $u_2\in K\cap(\overline{\Omega_R}\backslash\Omega_\rho)$,且这两个不动点是边值问题(1)的对称正解. 证毕.

相似的方法可得到下面的结论:

定理 3.4 设(A1),(A2)成立,若

(H5) $f^0<\Lambda^*$ 和 $f\infty<\Lambda^*$,

(H6) 存在一个常数 ρ^* 使得

$$f(t,u,u')\geqslant\Lambda\rho^*,(t,u,u')\in [0,1]\times[\frac{1}{4}\rho^*,\rho^*)\times(-\infty,\infty)$$

成立,则边值问题(1)至少有两个对称正解 u_1 和 u_2,使得 $0<\|u_1\|<\rho^*<\|u_2\|$.

4 例 子

考虑下面的三点边值问题:

$$\begin{cases} u''(t)+(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{1-t}})(3u+\frac{6(1+t(1-t))u}{1+u}+\sqrt{u'})=0, t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=\frac{1}{2}u(\frac{1}{3}) \end{cases}$$

对称正解的存在性,这里 $a(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{1-t}}$,$f=3u+\frac{6(1+t(1-t))u}{1+u}+\sqrt{u'}$. 则 $\Lambda=2.5$,$\Lambda^*=\frac{15}{16}$. 由 $f_0=9\in(\Lambda,\infty)$,$f^\infty=3\in(0,\Lambda^*)$ 知条件(H1)成立. 从而由定理 3.1 知方程存在对称正解.

参考文献:

[1] Chu J, Zhou C. Positive solutions for singular nonlinear third order periodic boundary value problem [J]. Nonlinear Anal:Theor, 2006, 64: 1528.

[2] Sun Y P. Positive solution of singular third-order three-point boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 2005, 306: 589.

[3] 龙严. 一类非线性二阶 Robin 问题多个正解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版,2017,55: 257.

[4] Liang S H, Zhang J H. Existence and uniqueness of strictly nondecreasing and positive solution for a fractional three-point boundary value problem [J]. Comput Math Appl, 2011, 62: 1333.

[5] 李涛涛. 非线性三点边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版,2017,54: 683.

[6] Thiramanus P. Positive solutions of m-point integral boundary value problems for second-order p-Laplacian dynamic eauations on time scales[J]. Adv Differ Equ, 2013, 2013:206.

[7] Zhao X K, Ge W G. The existence of positive pseudo-symmetric solution for a three-point boundary value problem [J]. Math Pract Theor, 2007, 22: 139.

[8] Sun Y P. Existence and multiplicity of symmetric positive solutions for three-point boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 2011, 329: 998.

[9] Tian Y S, Liu C G. Existence of symmetric positive solutions for a three-point singular boundary value problem with a p-Laplacian operator[J]. Acta Math Sci, 2010, 30: 784.

[10] Akcan U, Hamal N A. Existence and monotone iteration of concave positive symmetric solutions for a three-point second-order boundary value problems with integral boundary conditions [J]. Dynam Syst Appl, 2015, 24: 259.

[11] Sun Y P. Optimal existence criteria for symmetric positive solutions to a three-point boundary value problem[J]. Nonlinear Anal:Theor, 2007, 66: 1051.

引用本文格式:

中 文:张静, 韩晓玲. 二阶三点边值问题对称正解的存在性及多解性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 935.

英 文:Zhang J, Han X L. Existence and multiplicity of symmetric positive solutions for second-order three-point boundary value problem [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 935.