doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2019. 02. 001

一类三阶非线性常微分方程边值问题正解的存在性

赵中姿
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了一类三阶非线性常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''' + \lambda f(t, u') = 0,\ t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = u''(0) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $f \in C([0,1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ 且当 $|u'| \to 0$ 时，$f(t,u') = au' + o(|u'|)$；当 $|u'| \to \infty$ 时 $f(t,u') = bu' + o(|u'|)$，$a,b \in (0,+\infty)$. 主要结果的证明基于 Dancer 全局分歧定理.

关键词：正解；存在性；特征值；Dancer 全局分歧定理
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)02-0189-05

Existence of positive solutions for a class of boundary value problem of third-order nonlinear ordinary differential equations

ZHAO Zhong-Zi
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of the positive solutions of the following boundary value problem of third-order nonlinear ordinary differential equations

$$\begin{cases} u''' + \lambda f(t, u') = 0,\ t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = u''(0) = 0, \end{cases}$$

where $f \in C([0,1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$, $f(t,u') = au' + o(|u'|)$ as $|u'| \to 0$, $f(t,u') = bu' + o(|u'|)$ as $|u'| \to \infty$, and $a,b \in (0,+\infty)$. The proof of the main result is based on the Dancer global bifurcation theorem.

Keywords: Positive solution; Existence; Eigenvalue; Dancer global bifurcation theorem
(2010 MSC 26A33)

1　引　言

三阶常微分方程边值问题在诸多领域有着广泛应用. 对其正解的存在性，目前已有一些结果[1-9]. 其中，2009 年 Liu 等[4]运用 Krasonosel'skii 不动点定理研究了三阶两点边值问题

$$\begin{cases} x'''(t) + f(t, x(t)) = 0,\ t \in [a,b], \\ x(a) = x(b) = x''(a) = 0, \end{cases}$$

在 f 连续且满足一定条件的情况下证明了问题至少存在一个正解. 由于所用工具的局限，该研究无法得到正解解集全局结构的任何信息. 此外，2009 年 Luan 等[6]运用不动点指数定理研究了三阶两点边值问题

$$\begin{cases} u''' + f(t, u) = 0,\ t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = u'(0) = 0, \end{cases}$$

在 f 与其相应的 Green 函数均满足一定条件的情况下得到了问题至少存在两个正解的结果.

本文运用全局分歧定理考察三阶边值问题

$$\begin{cases} u''' + \lambda f(t, u') = 0,\ t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = u''(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2018-03-29
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：赵中姿(1994－)，女，山西太原人，主要研究方向常微分方程边值问题. E-mail：15193193403@163.com

正解解集的全局结构以及当 $\lambda=1$ 时问题(1)正解的存在性.

2 正映射的分歧定理

本文总假定:

(A_1) $f:[0,1)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续,且存在常数 $a,b\in(0,\infty)$ 使得

$f(t,p)=ap+o(|p|),|p|\to 0,t\in[0,1]$,

$f(t,p)=bp+o(|p|),|p|\to\infty,t\in[0,1]$;

(A_2) 当 $p\neq 0$ 时, $f(t,p)\neq 0,\forall t\in[0,1]$;

(A_3) 存在常数 $a_0\in(0,\infty)$ 使得 $f(t,p)\geq a_0 p$, $(t,p)\in[0,1]\times\mathbf{R}$.

为给出正解的存在性结果,我们要用到下列广义特征值问题的谱结构:

$$\begin{cases}u'''+\eta u'=0,\ t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=u''(0)=0\end{cases}\tag{2}$$

假设 E 是一个实的 Banach 空间,范数为 $\|\cdot\|$. 设 K 是 E 中的一个锥. A 是一个非线性映射, $A:[0,\infty)\times K\to E$. 若 $A([0,\infty)\times K)\subseteq K$,则称 A 是正的. 若 A 是连续的且将 $[0,\infty)\times K$ 中的有界子集映成 E 中的前紧致子集,则称 A 是 K-全连续的. 若一个正线性算子 V 满足 $A(\lambda,u)\geq\lambda V(u)$, $(\lambda,u)\in[0,\infty)\times K$,则称 V 在 E 上是对于 A 的线性弱函数. 若 B 是 E 上的一个连续线性算子,则定义 $r(B)$ 为 B 的谱半径. 定义本征值集合

$$c_k(B)=\{\lambda\in[0,\infty):\exists x\in K,\|x\|=1,\ x=\lambda Bx\}.$$

引理 2.1[13] 假设以下两条均成立

(i) K 有非空的内部且 $E=\overline{K-K}$;

(ii) $A:[0,\infty)\times K\to E$ 是 K-全连续且正的, $A(\lambda,0)=0,\lambda\in\mathbf{R}$; $A(0,u)=0,u\in K$ 且 $A(\lambda,u)=\lambda Bu+F(\lambda,u)$. 其中 $B:E\to E$ 是 E 上的一个强正的线性紧算子且 $r(B)>0$, $F:[0,\infty)\times K\to E$ 满足 $\|F(\lambda,u)\|=o(\|u\|)$, $\|u\|\to 0$ 在 λ 中局部一致.

则存在 $D_k(A)=\{(\lambda,u)\in[0,\infty)\times K:u=A(\lambda,u),u\neq 0\}\cup\{(r^{-1}(B),0)\}$ 的一个无界连通分支 C,使得 $\{(r^{-1}(B),0)\}\in C$. 进一步,若 A 有一个线性弱函数 V 且存在一个 $(\mu,y)\in(0,\infty)\times K$ 使得 $\|y\|=1$ 且 $\mu Vy\geq y$,则 C 在 $D_k(A)\cap([0,\mu]\times K)$ 中.

3 广义特征值

定义 3.1 假设 $\alpha\in(0,\infty)$ 给定. 如果线性问题

$$\begin{cases}-u'''=\lambda\alpha u',\ t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=u''(0)=0\end{cases}\tag{3}$$

有非平凡解,则称 λ 是问题(3)的广义特征值. 这一非平凡解称为 λ 对应的广义特征函数.

引理 3.2 假设 $\alpha\in(0,\infty)$ 给定. 那么问题(3)的广义特征值满足

$$\lambda_1(\alpha)<\lambda_2(\alpha)<\cdots<\lambda_n(\alpha)<\cdots,$$

这里 $\lambda_k(\alpha)=\dfrac{k^2\pi^2}{\alpha},k\in\mathbf{N}^+$. $\lambda_k(\alpha)$ 对应的问题(3)的广义特征函数为 $\varphi_k(t)=\sin k\pi t$.

证明 令 $u'=v$. 则问题(3)可以转换为

$$\begin{cases}-v''=\lambda\alpha v,\ t\in[0,1],\\ \int_0^1 v(s)\mathrm{d}s=0,v'(0)=0\end{cases}\tag{4}$$

当 $\lambda\alpha\leq 0$ 时,上述问题只有平凡解. 因此 $\lambda\leq 0$ 不是问题(3)的广义特征值. 当 $\lambda\alpha>0$ 时,上述问题的解可以写成

$$v(t)=c_1\cos\sqrt{\lambda\alpha}t+c_2\sin\sqrt{\lambda\alpha}t,$$

$$v'(t)=-c_1\sqrt{\lambda\alpha}\sin\sqrt{\lambda\alpha}t+c_2\sqrt{\lambda\alpha}\cos\sqrt{\lambda\alpha}t,$$

将边界条件代入上式可以得到

$$c_2=0,c_1\int_0^1\cos\sqrt{\lambda\alpha}t\,\mathrm{d}t=0.$$

为使得 c_1,c_2 不全为零,令 $\int_0^1\cos\sqrt{\lambda\alpha}t\,\mathrm{d}t=0$. 解得 $\lambda_k(\alpha)=\dfrac{k^2\pi^2}{\alpha},k\in\mathbf{N}^+$, $\lambda_k(\alpha)$ 对应的问题(4)的广义特征函数为 $\phi_k(t)=\cos k\pi t$, $\lambda_k(\alpha)$ 对应的问题(3)的广义特征函数为 $\varphi_k(t)=\sin k\pi t$,因为 $\alpha\in(0,\infty)$, $k\in\mathbf{N}^+$,显然有 $\lambda_1(\alpha)<\lambda_2(\alpha)<\cdots<\lambda_n(\alpha)<\cdots$. 引理得证.

4 主要结论及其证明

定理 4.1 假设(A_1)~(A_3)成立且下列条件之一成立

(i) $\lambda_1(b)<1<\lambda_1(a)$;

(ii) $\lambda_1(a)<1<\lambda_1(b)$.

则问题(1)正解的解集是一个连接 $(\lambda_1(a),0)$ 到 $(\lambda_1(b),\infty)$ 的无界连通分支.

注 1 定理 4.1 中的连通分支就是引理 2.1 中的无界连通分支 $C\in D_k(A)=\{(\lambda,u)\in[0,\infty)\times K:u=A(\lambda,u),u\neq 0\}\cup\{(r^{-1}(B),0)\}$.

推论 4.2 假设(A_1)~(A_3)成立且下列条件之一成立

(i) $\lambda_1(b)<1<\lambda_1(a)$;

(ii) $\lambda_1(a)<1<\lambda_1(b)$.

则下列三阶非线性常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u'''+f(t,u')=0,\ t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=u''(0)=0 \end{cases} \tag{5}$$

至少存在一个正解.

注 2　当$\lambda_1(a)=1=\lambda_1(b)$时,问题(5)未必存在正解.例如,我们考虑问题

$$\begin{cases} -u'''=\pi^2u'+\rho(u'),\ t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=0, \end{cases}$$

这里

$$\rho(x)=\begin{cases} x^2,x\in[0,1], \\ \sqrt{x},\ x\in(1,+\infty), \\ 0,\ x\in(-\infty,0). \end{cases}$$

可以看到,当 $a=b=\pi^2$ 时,$f(t,p)=\pi^2p+\rho(p)$满足$(A_1)\sim(A_2)$,当$a_0=\frac{\pi^2}{2}$时,$f(t,p)=\pi^2p+\rho(p)\geq\frac{\pi^2}{2}p$ 满足(A_3),由引理 3.2 可得,$\lambda_1(a)=\lambda_1(b)=1$.假设 u 是上述问题的一个正解,在$-u'''=\pi^2u'+\rho(u')$的两边同乘 $\cos\pi t$,再在 0 到 1 上积分,得到

$$\int_0^1-u'''(t)\cos\pi t\mathrm{d}t=$$
$$u''(1)+\pi^2\int_0^1\cos\pi tu'(t)\mathrm{d}t=$$
$$\pi^2\int_0^1\cos\pi tu'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t,$$

即

$$u''(1)=\int_0^1\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t.$$

下证$\int_0^1\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t>0$.因 u 是一个上凸的解且$u(0)=u(1)$,则一定存在一点 δ 使得$u'(\delta)=0$.则 $u'(t)>0,t\in(0,\delta)$及 $u'(t)<0,t\in(\delta,1)$.不妨先设 $\delta\in(0,\frac{1}{2}]$.可得

$$\int_0^1\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^\delta\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t+\int_\delta^1\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^\delta\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t+0>0.$$

若 $\delta\in(\frac{1}{2},1)$,同样有 $u'(t)>0,t\in(0,\delta)$及 $u'(t)<0,t\in(\delta,1)$.从而可得

$$\int_0^1\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^\delta\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t+$$
$$\int_\delta^1\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^\delta\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t.$$

可以看到,上式第一项大于 0,第二项小于 0.由 u 的上凸性知,$u'(t)$是递减的.又 $u'(t)>0,t\in(0,\delta)$时 $\rho(u')$的递减性及积分区间$[0,\frac{1}{2}]$的长度大于$[\frac{1}{2},\delta]$的长度,从而得到

$$\int_0^1\rho(u')\cos\pi t\mathrm{d}t>0.$$

而 u 是正解且$u(0)=u(1)=0$,则有 $u''(t)\leq0,t\in[0,1]$.矛盾.因此这一问题虽然满足$(A_1)\sim(A_3)$,但没有正解.

设 $e(t),t\in[0,1]$是问题(3)的 $\alpha=1$ 时的第一个广义特征函数,X 是定义在 Banach 空间上的一个集合.

$$X=\{u\in C^2[0,1]\,|\,u(0)=u(1)=u''(0)=0\},$$

存在 $\gamma\in(0,\infty)$使得

$$-\gamma e(t)\leq-u''(t)\leq\gamma e(t)$$

对于 $u\in X$,有

$$\begin{cases} -u''=h,\ t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

可以算得

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)h(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)(-u''(t))\mathrm{d}s,$$

由$-\gamma e(t)\leq-u''(t)\leq\gamma e(t)$可以得到

$$-\gamma\int_0^1G(t,s)e(s)\mathrm{d}s\leq u(t)\leq$$
$$\gamma\int_0^1G(t,s)e(s)\mathrm{d}s,$$

这里

$$G(t,s)=\begin{cases} (1-t)s,0\leq s\leq t\leq1, \\ (1-s)t,0\leq t\leq s\leq1. \end{cases}$$

因为 $e(t)$是问题(3)的第一个广义特征函数,即 $e(t)$是问题(3)的非平凡解,则有 $e'''(t)+\lambda_1e'(t)=0$,解得

$$e(t)=\int_0^1G(t,s)\lambda_1e(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$\frac{1}{\lambda_1}e(t)=\int_0^1G(t,s)e(s)\mathrm{d}s.$$

从而可得

$$-\frac{\gamma}{\lambda_1}e(t)\le u(t)\le\frac{\gamma}{\lambda_1}e(t),t\in[0,1].$$

因为$\frac{\gamma}{\lambda_1}<\gamma$,定义 X 的范数为

$$\|u\|_X:=\inf\{\gamma|-\gamma e(t)\le -u''(t)\le\gamma e(t),\ t\in[0,1]\}.$$

X 在这一范数下是一个赋范线性空间,又 X 是完备的. 因此 X 在范数 $\|\cdot\|_X$ 下构成一个 Banach 空间. 设 $P:=\{u\in X|u''(t)\le 0,u(t)\ge 0,t\in[0,1]\}$,$P$ 是正规的,有非空内部且 $X=\overline{P-P}$. 设 $Y=C[0,1]$,范数 $\|u\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$. 定义算子

$L:D(L)\to Y,Lu=-u''',u\in D(L),D(L)=\{u\in C^3[0,1]|u(0)=u(1)=u''(0)=0\}$.

因为 $L^{-1}:Y\to D(L)\subset C^3$,且 C^3 是紧嵌入 C^2 的,则 $L^{-1}:Y\to X$ 是紧的.

引理 4.3 设 $h\in Y,h\ge 0,h(t_0)>0,t_0\in[0,1]$且有 $Lu-h=0$. 则 u 属于 P 的内部.

证明 要证 u 在 P 的内部,只需证 $u\in X,-u''>0,u(t)>0$,由 $Lu-h=0$,即证

$$\begin{cases}-u'''=h,\ t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=u''(0)=0.\end{cases}$$

方程两边同时从 0 到 t 上积分可以得到

$$-u''(t)=\int_0^t h(s)\mathrm{d}s.$$

又由 $h(t)\ge 0$,$\exists\, t_0\in[0,1]$使得 $h(t_0)>0$,从而可得$\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>0$. 则 $-u''(t)>0$. 因此 $u(t)$在$[0,1]$上是上凸的. 再由 $u(0)=u(1)=0$ 可以证得 $u(t)>0,t\in(0,1)$. 引理得证.

设 $\zeta,\xi\in C([0,1]\times\mathbf{R})$使得

$$f(t,p)=ap+\zeta(t,p),f(t,p)=bp+\xi(t,p).$$

由(A_1)得

$$\lim_{|p|\to 0}\frac{\zeta(t,p)}{|p|}=0,t\in[0,1],$$

$$\lim_{|p|\to\infty}\frac{\xi(t,p)}{|p|}=0,t\in[0,1].$$

设 $\tilde{\xi}(r)=\max\{|\xi(t,p)|:0\le|p|\le r,t\in[0,1]\}$. 则 $\tilde{\xi}(r)$是非减的且$\lim_{r\to\infty}\frac{\tilde{\xi}(r)}{r}=0$. 考虑问题

$$Lu=\lambda au'+\lambda\zeta(t,u') \tag{6}$$

该问题是从平凡解 $u\equiv 0$ 处产生的分歧问题. 则有

$$-u''(t)=\int_0^t\lambda au'(s)\mathrm{d}s+\lambda\int_0^t\zeta(s,u'(s))\mathrm{d}s,$$

$$u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,x)a\int_0^x u'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\lambda\int_0^1 G(t,x)\int_0^x\zeta(s,u'(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}x=:A(\lambda,u)(t).$$

定义线性算子 $B:X\to X$

$$Bu(t):=\int_0^1 G(t,x)a\int_0^x u'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\int_0^1 G(t,x)au(x)\mathrm{d}x.$$

由引理 4.3,B 在 X 上是一个强正的线性算子,且 $B:X\to X$ 是全连续的. 由引理 3.2 可得,$r(B)=[\lambda_1(a)]^{-1}$. 定义算子 $F:[0,\infty)\times X\to X$,

$$F(\lambda,u):=\lambda\int_0^1 G(t,x)\int_0^x\zeta(s,u'(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}x.$$

由 $\|u\|_\infty\le\|u'\|_\infty\le\|u\|_X$ 及 $\lim_{|p|\to 0}\frac{\zeta(t,p)}{|p|}=0$ 可得

$$\|F(\lambda,u)\|_X=o(\|u\|_X).$$

由(A_2)及引理 4.3 知,当 $\lambda>0$ 时,若(λ,u)是问题(6)的一个非平凡解则 u 在 P 的内部. 结合引理 2.1,考虑存在集合

$$\{(\lambda,u)\in(0,\infty)\times P:u=A(\lambda,u),u\in\mathrm{int}P\}\cup\{(\lambda_1(a),0)\}$$

的一个无界连通子集 C 使得$(\lambda_1(a),0)\in C$.

定理 4.1 的证明 设$(\mu_n,y_n)\in C$ 满足当 $n\to\infty$时,$\mu_n+\|y_n\|_X\to\infty$. 注意到 $\mu_n>0,n\in\mathbf{N}$. 因为$(0,0)$是 $\lambda=0$ 时问题(6)的唯一解且 $C\cap(\{0\}\times X)=\varnothing$. 在(i)这种情形下,$(\lambda_1(b),\lambda_1(a))\subseteq\{\lambda\in\mathbf{R}|\exists(\lambda,u)\in C\}$.

先证若存在一个常数 $M>0$ 使得 $\mu_n\in(0,M]$,则 C 连接$(\lambda_1(a),0)$到$(\lambda_1(b),\infty)$. 因为 $\mu_n\in(0,M]$,所以 $\|y_n\|_X\to\infty$. 定义方程

$$Ly_n=\mu_n by_n'+\mu_n\xi(t,y_n'(t)).$$

令 $\bar{y}_n=\frac{y_n}{\|y_n\|_X}$. 因为$\bar{y}_n$ 在 X 中有界,则有$\bar{y}_n\to\bar{y}$,$\bar{y}\in X$ 且 $\|\bar{y}\|_X=1$. 进一步,$\tilde{\xi}$是非减的且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\xi(y_n(t))|}{\|y_n\|_X}=0.$$

又由 $\|u\|_\infty\le\|u'\|_\infty\le\|u\|_X$ 可得

$$\frac{|\xi(y_n(t))|}{\|y_n\|_X}\le\frac{\tilde{\xi}(|y_n(t)|)}{\|y_n\|_X}\le\frac{\tilde{\xi}(\|y_n(t)\|_\infty)}{\|y_n\|_X}\le\frac{\tilde{\xi}(\|y_n\|_X)}{\|y_n\|_X}.$$

因此

$$\bar{y}(t):=\int_0^1 G(t,x)\bar{\mu}b\,\bar{y}(x)\mathrm{d}x.$$

这里 $\bar{\mu}:=\lim_{n\to\infty}\mu_n$. 则 $L\bar{y}=\bar{\mu}b\bar{y}'$. 由引理 3.2,$\bar{\mu}=\lambda_1(b)$,因此 C 连接$(\lambda_1(a),0)$到$(\lambda_1(b),\infty)$.

再证确实存在一个常数 $M>0$ 使得 $\mu_n\in(0,$

$M]$. 由引理 2.1，只需证明 A 有一个线性弱函数 V 且存在一个 $(\mu, y) \in (0, \infty) \times P$ 使得 $\| y \|_X = 1$ 且 $\mu V y \geq y$. 由 (A_3)，存在常数 $a_0 \in (0, \infty)$ 满足 $f(t, p) \geq a_0 p$，$(t, p) \in [0, 1] \times \mathbf{R}$. 对于 $u \in X$，设

$$Vu(t) := \int_0^1 G(t, x) a_0 u(x) \mathrm{d}x.$$

则 V 是 A 的一个线性弱函数. 由 $\mu \int_0^1 G(t, x) a_0 y(x) \mathrm{d}x = y(t)$，取 $y(t) = e(t) = \sin \pi t$ 可得 $\mu = \frac{\pi^2}{a_0}$. 由引理 2.1，$|\mu_n| \leq \frac{\pi^2}{a_0}$.

在(ii)这种情形下，如果 $(\mu_n, y_n) \in C$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} (\mu_n + \| y_n \|_X) = \infty$$

且 $\lim_{n \to \infty} \mu_n = \infty$. 则 $(\lambda_1(a), \lambda_1(b)) \subseteq \{\lambda \in (0, \infty) \mid (\lambda, u) \in C\}$. 进一步，$(\{1\} \times X) \cap C = \varnothing$. 假设存在 $M > 0$ 使得对所有 $n \in \mathbf{N}$，$\mu_n \in (0, M]$，则与(i)类似，有 $(\mu_n, y_n) \to (\lambda_1(b), \infty)$，$n \to \infty$，即 C 连接 $(\lambda_1(a), 0)$ 到 $(\lambda_1(b), \infty)$. 定理证毕.

推论 4.2 的证明　当 $\lambda = 1$ 时，问题(1)的解 u 就是问题(5)的解，而问题(6)与问题(1)是等价的. 因此当 $\lambda = 1$ 时，问题(6)的解就是问题(1)的解，即我们要证 C 在 $\mathbf{R} \times X$ 中穿过超平面 $\{1\} \times X$. 定理 4.1 已经证得 C 是从 $(\lambda_1(a), 0)$ 到 $(\lambda_1(b), \infty)$ 的连通分支. 又 $\lambda_1(a) < 1 < \lambda_1(b)$ 或 $\lambda_1(b) < 1 < \lambda_1(a)$，这说明这一连通分支一定穿过超平面 $\{1\} \times X$. 那么问题(5)至少存在一个正解. 推论证毕.

参考文献：

[1] Anderson D. Green's function for a third-order generalized right focal problem [J]. J Math Anal Appl, 2003, 288: 1.

[2] Anderson D, Davis J M. Multiple solutions and eigenvalues for three-order right focal boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2002, 267: 135.

[3] Yao Q L. The existence and multiplicity of positive solutions for a third-order three point boundary value problem [J]. Acta Math Appl Sin, 2003, 19: 117.

[4] Liu Z, Kang S M, Ume J S. Triple positive solutions of nonlinear third order boundary value problems [J]. Taiwan J Math, 2009, 13: 955.

[5] 魏丽萍. 一类三阶周期边值共振问题解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：260.

[6] Luan S X, Su H, Sun Q F. Positive solutions to third-order two point semipositone boundary value problems [J]. Int J Math Anal, 2009, 3: 99.

[7] Ma R Y. Multiplicity results for a third order boundary value problem at resonance [J]. Nonlinear Anal, 1998, 32: 493.

[8] Yao Q. Positive solutions to some nonlinear eigenvalue problems of third-order ordinary differential equations [J]. Acta Math Sci Ser A, 2003, 23: 513.

[9] Yao Q, Feng Y. The existence of solutions for a third-order two-point boundary value problems [J]. Appl Math Lett, 2002, 15: 227.

[10] 闫东亮，马如云. 带有导数项的 Neumann 问题正解 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：1136.

[11] 龙严. 一类非线性二阶 Robin 问题多个正解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：249.

[12] 叶芙梅. 一类非线性二阶常微分方程 Dirichlet 问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：463.

[13] Dancer E N. Global solution branches for positive mappings [J]. Arch Ratton Mech An, 1973, 52: 181.

引用本文格式：

中　文：赵中姿. 一类三阶非线性常微分方程边值问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：189.

英　文：Zhao Z Z. Existence of positive solutions of boundary value problem for a class of third-order nonlinear ordinary differential equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 189.