doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2018. 06. 004

二阶奇异非线性特征值问题正解的存在性

曹文娟，李杰梅，温九红
（兰州交通大学数理学院，兰州 730070）

摘　要：本文讨论了含一般微分算子的二阶奇异微分方程在 Sturm-Liouville 边值条件下的正解的存在性. 通过将非线性项 f 在原点及无穷远处的增长性分为 9 种情形，本文运用锥拉伸与压缩不动点定理获得了问题无正解、至少有一个正解及至少有两个正解存在时参数 λ 的取值范围.

关键词：二阶奇异微分方程；不动点定理；正解；Sturm-Liouville 边值条件
中图分类号：O175. 8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)06-1148-07

Existence of positive solutions of second order singular nonlinear eigenvalue problems

CAO Wen-Juan, *LI Jie-Mei*, *WEN Jiu-Hong*
(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we consider the existence of positive solutions for the second-order singular differential equation with Sturm-Liouville boundary condition. By dividing the growth property of f at zero and infinity into 9 cases, we discuss the ranges of λ corresponding to the cases of the equation having none, at least one and two positive solutions by using the fixed point theorem of cone expansion and compression.

Keywords: Second-order singular differential equation; Fixed point theorem; Positive solution; Sturm-Liouville boundary condition
(2010　MSC　35B33)

1　引　言

非线性常微分方程边值问题在理论和应用方面具有非常重要的价值. 近年来，对非线性特征值边值问题正解的存在性的研究逐渐受到国内外学者的关注，得到了不少重要结果，对二阶 Sturm-Liouville 特征值边值问题

$$\begin{cases} -(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) + \lambda g(t,u(t)) = 0, t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的研究就是其中的一个，这里 $\alpha,\beta,\gamma,\delta \geqslant 0$，$\alpha^2+\beta^2>0$，$\gamma^2+\delta^2>0$.

2007 年，孙等[1,2]研究了问题(1)在 $\lambda=1$，$g(t,u):=h(t)f(u)$，h 允许在 $t=0,1$ 处奇异的情形，在非线性项 f 满足超线性或次线性的条件下运用拓扑度方法获得了该问题平凡解和正解的存在性.

2015 年，程等[3]在 f 满足次超线性时运用上下解方法及锥上的不动点指数理论获得了问题(1)正解的全局存在性结果.

2017 年，叶[4]讨论了问题(1)的特殊情形 $p=1$，$\lambda=1$，在非线性项 f 满足超线性或次线性两种情形下运用锥拉伸与压缩不动点定理获得了问题(1)在 Dirichlet 边值条件下正解的存在性结果. 更多

收稿日期：2018-04-08
基金项目：甘肃省自然科学基金(1308RJZA113)；甘肃省高校基本科研业务费基金(212084)
作者简介：曹文娟(1991－)，女，硕士研究生，主要从事常微分方程边值问题的研究. E-mail：18893705406@163. com
通讯作者：李杰梅. E-mail：lijiemei81@126. com

二阶边值问题的研究可参见文献[5～8]及其中的参考文献.

但是，在上述对二阶边值问题的研究中，奇异性仅限于非线性项，对微分算子的系数项未做奇异性要求，且非线性项的增长性仅为超线性或次线性. 那么，一个自然的问题是：当微分算子的系数函数和非线性项同时具有奇异性且非线性项在原点和无穷远处具有与此不同的增长性条件时，二阶奇异非线性特征值问题正解的存在性如何？

受以上文献的启发，本文讨论带一般微分算子的二阶奇异非线性特征值问题

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)u'(t)+b(t)u(t)+\lambda h(t)f(u(t))=0, t\in(0,1),\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \gamma u(1)+\delta u'(1)=0\end{cases}\tag{2}$$

正解的存在性. 当非线性项 f 在原点和无穷远处满足不同增长性组合时，本文讨论了问题(2)无正解、至少有一个正解及有两个正解时参数 λ 的取值范围.

2　预备知识

本文所用的主要工具是如下的锥拉伸与压缩不动点定理.

引理 2.1[9,10]　设 E 为 Banach 空间，$K\subset E$ 是 E 中的一个锥，Ω_1,Ω_2 是 E 的开子集，$0\in\Omega_1$，$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 若全连续算子 $A: K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 满足

(i) $\|Au\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Au\|\geqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2$，

或

(ii) $\|Au\|\geqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Au\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2$，

则 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上有一个不动点.

记 $AC[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上的绝对连续函数. 令

$AC_{\mathrm{loc}}[0,1)=\{w:[0,1)\to\mathbf{R}\mid$ 对任意的 $d\in(0,1)$，$w(\cdot)$ 在区间 $[0,d]$ 绝对连续$\}$，

$AC_{loc}(0,1]=\{w:(0,1]\to\mathbf{R}\mid$ 对任意的 $d\in(0,1)$，$w(\cdot)$ 在区间 $[d,1]$ 绝对连续$\}$.

以下总假设

(A_0) $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant0$，$\alpha^2+\beta^2>0$，$\gamma^2+\delta^2>0$；

(A_1) $a\in C(0,1)\cap L^1(0,1)$；$b\in C((0,1),(-\infty,0))$ 且 $\int_0^1|b(s)|\mathrm{d}s<+\infty$；

(A_2) $h\in C((0,1),[0,\infty))$，$h(\cdot)$ 在 $(0,1)$ 的任意子区间上不恒为零，且 $\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s<+\infty$；

(A_3) $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，且 $u>0$ 时 $f(u)>0$.

引理 2.2[11]　假设 (A_1) 成立. 则

(i) 初值问题

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)u'(t)+b(t)u(t)=0, t\in(0,1),\\ u(0)=0, u'(0)=1\end{cases}\tag{3}$$

有唯一递增解 $e_1\in AC[0,1)\cap C^1[0,1)$，$e_1'\in AC_{loc}[0,1)$；

(ii) 初值问题

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)u'(t)+b(t)u(t)=0, t\in(0,1),\\ u(1)=0, u'(1)=-1\end{cases}\tag{4}$$

有唯一递减解 $e_2\in AC[0,1]\cap C^1(0,1]$，$e_2'\in AC_{loc}(0,1]$.

引理 2.3　假设 (A_1) 成立. 则

(i) $\varphi(t)=(\alpha e_2(0)-\beta e_2'(0))e_1(t)+\beta e_2(t)$ 是问题

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)u'(t)+b(t)u(t)=0, t\in(0,1),\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0\end{cases}\tag{5}$$

递增的正解；

(ii) $\psi(t)=\delta e_1(t)+(\gamma e_1(1)+\delta e_1'(1))e_2(t)$ 是问题

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)u'(t)+b(t)u(t)=0, t\in(0,1),\\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0\end{cases}\tag{6}$$

递减的正解.

证明　(i) 首先证明 $\varphi(t)$ 为问题(5)的解. 因为

$$\varphi'(t)=(\alpha e_2(0)-\beta e_2'(0))e_1'(t)+\beta e_2'(t),$$
$$\varphi''(t)=(\alpha e_2(0)-\beta e_2'(0))e_1''(t)+\beta e_2''(t).$$

所以

$$\begin{aligned}&\varphi''(t)+a(t)\varphi'(t)+b(t)\varphi(t)=\\&\quad(\alpha e_2(0)-\beta e_2'(0))e_1''(t)+\beta e_2''(t)+\\&\quad a(t)((\alpha e_2(0)-\beta e_2'(0))e_1'(t)+\\&\quad\beta e_2'(t))+b(t)((\alpha e_2(0)-\\&\quad\beta e_2'(0))e_1(t)+\beta e_2(t))=\\&\quad(\alpha e_2(0)-\beta e_2'(0))(e_1''(t)+\\&\quad a(t)e_1'(t)+b(t)e_1(t))+\\&\quad\beta(e_2''(t)+a(t)e_2'(t)+b(t)e_2(t))=0\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\alpha\varphi(0)-\beta\varphi'(0)=\\&\quad\alpha((\alpha e_2(0)-\beta e_2'(0))e_1(0)+\\&\quad\beta e_2(0))-\beta((\alpha e_2(0)-\\&\quad\beta e_2'(0))e_1'(0)+\beta e_2'(0))=0.\end{aligned}$$

从而 $\varphi(t)$ 为问题(5)的解. 又根据引理 2.2 有 $\varphi(t)>0$. 所以 $\varphi(t)$ 为问题(5)的正解.

下证 $\varphi(t)$ 递增. 方程 $\varphi''(t)+a(t)\varphi'(t)+b(t)\varphi$

$(t)=0$ 两边同乘 $p(t)=\exp(\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau)$ 得

$$(p(t)\varphi'(t))'=-b(t)p(t)\varphi(t).$$

因为 $b(t)<0,p(t)>0,\varphi(t)>0$,所以 $(p(t)\varphi'(t))'>0$,从而 $p(t)\varphi'(t)>p(1)\varphi'(0)>0$. 所以 $\varphi'(t)>0$,从而 $\varphi(t)$递增.

(ii) 类似可证. 证毕.

令 $G(t,s)$为问题(2)的 Green 函数,即

$$G(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases}\varphi(s)\psi(t),0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \varphi(t)\psi(s),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\rho=\varphi'(\frac{1}{2})\psi(\frac{1}{2})-\varphi(\frac{1}{2})\psi'(\frac{1}{2}).$$

根据文献[11],问题(2)的解等价于积分算子

$$A_\lambda u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)\,\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

的不动点 u,即 $A_\lambda u=u$.

引理 2.4 Green 函数满足下面性质:

(i) $G(t,s)=G(s,t)$, $\forall s,t\in[0,1]$;

(ii) $G(t,s)>0$, $\forall s,t\in(0,1)$;

(iii) $G(t,s)\leqslant G(s,s)$, $\forall s,t\in[0,1]$;

(iv) $G(t,s)=\delta G(t,t)G(s,s)$, $\forall s,t\in[0,1]$, $\delta=\rho(\varphi(1)\psi(0))^{-1}$.

证明 根据(7)式,(i)和(ii)显然成立.

(iii) 根据引理 2.2 和(7)式有

$$G(t,s)\leqslant G(s,s).$$

(iv)当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时,

$$\frac{G(t,s)}{G(t,t)G(s,s)}=\frac{\frac{1}{\rho}\varphi(s)\psi(t)}{\frac{1}{\rho}\varphi(t)\psi(t)\frac{1}{\rho}\varphi(s)\psi(s)}=$$

$$\frac{\rho}{\varphi(t)\psi(s)}\geqslant\frac{\rho}{\varphi(1)\psi(0)}=\delta.$$

当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时,

$$\frac{G(t,s)}{G(t,t)G(s,s)}=\frac{\frac{1}{\rho}\varphi(t)\psi(s)}{\frac{1}{\rho}\varphi(t)\psi(t)\frac{1}{\rho}\varphi(s)\psi(s)}=$$

$$\frac{\rho}{\varphi(s)\psi(t)}\geqslant\frac{\rho}{\varphi(1)\psi(0)}=\delta.$$

证毕.

3 主要结果

记

$$f_0:=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u},\ f_\infty:=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}.$$

定义函数

$$f^*(u)=\max_{0\leqslant t\leqslant u}\{f(t)\},$$

且

$$f_0^*=\lim_{u\to 0}\frac{f^*(u)}{u},f_\infty^*=\lim_{u\to\infty}\frac{f^*(u)}{u}.$$

引理 3.1[12] 假设(A_3)成立. 则 $f_0^*=f_0,f_\infty^*=f_\infty$.

定理 3.2 假设(A_1)~(A_3)成立. 则

(i) 若 $f_0=0$ 或 $f_\infty=0$,则存在 $\lambda_0>0$,使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时问题(2)至少存在一个正解;

(ii) 若 $f_0=\infty$或 $f_\infty=\infty$,则存在 $\lambda_0>0$,使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时问题(2)至少存在一个正解.

定理 3.3 假设(A1)~(A3)成立. 则

(i) 若 $f_0=f_\infty=0$,则存在 $\lambda_0>0$,使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时问题(2)至少存在两个正解;

(ii) 若 $f_0=f_\infty=\infty$,则存在 $\lambda_0>0$,使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时问题(2)至少存在两个正解.

定理 3.4 假设(A_1)~(A_3)成立. 则

(i) 若 $f_0<\infty$且 $f_\infty<\infty$,则存在 $\lambda_0>0$,使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时问题(2)没有正解;

(ii) 若 $f_0>0$ 且 $f_\infty>0$,则存在 $\lambda_0>0$,使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时,问题(2)没有正解;

(iii) 若 $0<f_0<\infty$且 $0<f_\infty<\infty$,则存在正数 $\lambda_*,\lambda^*,\lambda_{**}$及 λ^{**},使得当 $\lambda_*<\lambda<\lambda^*$ 时问题(2)至少有一个正解;当 $\lambda>\lambda^{**}$ 或 $0<\lambda<\lambda_{**}$ 时问题(2)没有正解.

定理 3.5 假设(A_1)~(A_3)成立. 则

(i) 若 $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$(超线性),则存在正数 λ_*,λ^*,使得当 $\lambda_*<\lambda<\lambda^*$ 时问题(2)至少存在一个正解;

(ii) 若 $f_0=\infty$且 $f_\infty=0$(次线性),则存在正数 λ_*,λ^*,使得当 $\lambda_*<\lambda<\lambda^*$ 时问题(2)至少存在一个正解.

令

$$p(s)=\exp(\int_{\frac{1}{2}}^{s} a(\tau)\mathrm{d}\tau),\tilde{h}(t)=p(t)h(t).$$

由(A_2)知,$\tilde{h}(t)$满足条件:

($\tilde{A}_2$)$\tilde{h}:(0,1)\to[0,\infty)$是连续的且在$(0,1)$的任意子区间上不恒为零.

进一步,我们有

$$\int_0^1\tilde{h}(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

在条件(A_1)~(A_2)下,边值问题(2)的解等价于积分算子

$$A_\lambda u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

的不动点 u，即 $A_\lambda u=u$.

记 $X=(C[0,1],\|\cdot\|)$，其中 $\|\cdot\|$ 为定义在 $C[0,1]$ 上的最大值范数. 对任意的 $\theta\in(0,\frac{1}{2})$，令

$$K=\{u\in X|u(t)\geqslant 0,t\in[0,1];\min_{t\in[\theta,1-\theta]}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\}.$$

其中 $\sigma=\min\left\{\frac{\psi(1-\theta)}{\psi(0)},\frac{\varphi(\theta)}{\varphi(1)}\right\}$. 则 K 为 Banach 空间 X 中的非负锥. 类似于文献[13]可证 $A_\lambda:K\to K$ 为全连续算子.

定理 3.2 的证明　(i) 取

$$r_1>0,m=\min_{\sigma r_1\leqslant t\leqslant r_1}\{f(t)\}.$$

令

$$\lambda_0=r_1\left(\delta mG(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

记

$$\Omega_{r_1}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_1\}.$$

若当 $\lambda>\lambda_0$ 时 $u\in\partial\Omega_{r_1}\cap K$，则

$$A_\lambda u(\frac{1}{2})\geqslant$$
$$\lambda\delta G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s>$$
$$\lambda_0 m\delta G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=r_1.$$

所以当 $\lambda>\lambda_0$ 时 $\|A_\lambda u\|>\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_1}\cap K$.

如果 $f_0=0$，则根据引理 3.1 有 $f_0^*=0$. 取 $r_2\in(0,r_1)$ 使得 $f^*(r_2)\leqslant\varepsilon r_2$，其中 $\varepsilon>0$ 且满足

$$\lambda\varepsilon\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\leqslant 1.$$

记

$$\Omega_{r_2}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_2\}.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_2}\cap K$，则有

$$A_\lambda u(t)\leqslant\lambda\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)f^*(r_2)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\varepsilon\|u\|\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\leqslant\|u\|.$$

所以 $\|A_\lambda u\|\leqslant\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_2}\cap K$.

如果 $f_\infty=0$，则根据引理 3.1 有 $f_\infty^*=0$. 故存在 $r_3\in(2r_1,\infty)$，使得 $f^*(r_3)\leqslant\varepsilon r_3,\varepsilon>0$ 且

$$\lambda\varepsilon\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\leqslant 1.$$

此时，令

$$\Omega_{r_3}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_3\}.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_3}\cap K$，则有

$$A_\lambda u(t)\leqslant\lambda\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)f^*(r_3)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\varepsilon\|u\|\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)ds\leqslant\|u\|.$$

所以 $\|A_\lambda u\|\leqslant\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_3}\cap K$. 由引理 2.1 可知，当 $f_0=0$ 或 $f_\infty=0$ 时存在 λ_0，使得 $\lambda>\lambda_0$ 时算子 A_λ 在 $K\cap(\overline{\Omega}_{r_1}\backslash\Omega_{r_2})$ 或 $K\cap(\overline{\Omega}_{r_3}\backslash\Omega_{r_1})$ 上至少有一个不动点，即边值问题(2)至少存在一个正解.

(ii) 取 $r_1>0,M=1+\max_{0\leqslant t\leqslant r_1}f(t)$，

$$\lambda_0=r_1\left(M\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

令

$$\Omega_{r_1}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_1\}.$$

若当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时 $u\in\partial\Omega_{r_1}\cap K$，我们有

$$A_\lambda u(t)\leqslant\lambda\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s<$$
$$\lambda_0 M\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=r_1.$$

所以 $\|A_\lambda u\|<\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_1}\cap K$. 如果 $f_0=\infty$，则存在 $r_2\in(0,r_1)$，使得当 $0\leqslant u\leqslant r_2$ 有 $f(u)\geqslant\eta u$，其中 $\eta>0$ 且

$$\lambda\eta\delta\sigma G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\geqslant 1.$$

记

$$\Omega_{r_2}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_2\}.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_2}\cap K$，则有

$$A_\lambda u(\frac{1}{2})\geqslant$$
$$\lambda\eta\delta G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)u(s)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\eta\delta\sigma G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\|u\|\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

所以 $\|A_\lambda u\|\geqslant\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_2}\cap K$. 如果 $f_\infty=\infty$，则存在 $\hat{H}_1>0$，使得当 $u\geqslant\hat{H}_1$ 有 $f(u)\geqslant\eta u$，其中 $\eta>0$ 且

$$\lambda\eta\delta\sigma G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\geqslant 1.$$

令

$$r_3:=\max\left\{2r_1,\frac{\hat{H}_1}{\sigma}\right\},\Omega_{r_3}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_3\}.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_3}\cap K$，则

$$\min_{t\in[\theta,1-\theta]}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\geqslant\hat{H}_1,$$

从而

$$A_\lambda u(\frac{1}{2})\geqslant\lambda\eta\delta G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)u(s)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\eta\delta\sigma\|u\|G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|.$$

所以 $\|A_\lambda u\| \geqslant \|u\|, u\in\partial\Omega_{r_3}\cap K$. 由引理 2.1 可知,当 $f_0=\infty$ 或 $f_\infty=\infty$ 时,存在 λ_0,使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时算子 A_λ 在 $K\cap(\overline{\Omega}_{r_1}\setminus\Omega_{r_2})$ 或 $K\cap(\overline{\Omega}_{r_3}\setminus\Omega_{r_1})$ 上至少有一个不动点,即边值问题(2)至少存在一个正解. 证毕.

定理 3.3 的证明

(i) 取常数 r_3, r_4,满足 $0<r_3<r_4$. 记 $m=\min\limits_{\sigma r_i\leqslant t\leqslant r_i}\{f(t)\}, i=3,4$. 取

$$\lambda_0=r_4\left(\delta mG(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

此时记

$$\Omega_{r_i}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_i\}, i=3,4.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_i}\cap K$,当 $\lambda>\lambda_0$ 时,则

$$A_\lambda u(\frac{1}{2})\geqslant \lambda\delta G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s> \lambda_0 m\delta G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=r_4.$$

所以当 $\lambda>\lambda_0$ 时

$$\|A_\lambda u\|>\|u\|, u\in\partial\Omega_{r_i}\cap K, i=3,4.$$

因为 $f_0=0$ 且 $f_\infty=0$,则可取 $r_1\in(0,\frac{r_3}{2})$ 和 $r_2\in(2r_4,\infty)$. 类似定理 3.2(i) 的证明知

$$\|A_\lambda u\|\leqslant\|u\|, u\in\partial\Omega_{r_i}\cap K, i=1,2.$$

因此由引理 2.1 可知,当 $\lambda>\lambda_0$ 时算子 A_λ 在 $u_1\in K\cap(\overline{\Omega}_{r_3}\setminus\Omega_{r_1})$ 和 $u_2\in K\cap(\overline{\Omega}_{r_2}\setminus\Omega_{r_4})$ 上至少存在两个不动点 u_1, u_2,这时边值问题(2)的解满足

$$r_1\leqslant\|u_1\|\leqslant r_3<r_4\leqslant\|u_2\|\leqslant r_2.$$

(ii) 取常数 r_3, r_4,满足 $0<r_3<r_4$,记 $M=1+\max\limits_{0\leqslant t\leqslant r_i}f(t), i=3,4$. 取

$$\lambda_0=\frac{r_3}{M\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s}$$

$$\Omega_{r_i}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_i\}, i=3,4.$$

当 $0<\lambda<\lambda_0, u\in\partial\Omega_{r_i}\cap K, i=3,4$ 时,我们有

$$A_\lambda u(t)\leqslant\lambda\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s< \lambda_0 M\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=r_3.$$

所以

$$\|A_\lambda u\|<\|u\|, u\in\partial\Omega_{r_i}\cap K, i=3,4.$$

因为 $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=\infty$,取 $r_1\in(0,\frac{r_3}{2})$ 和 $r_2\in(2r_4,\infty)$. 类似定理 3.2 (ii)的证明知 $\|A_\lambda u\|\geqslant\|u\|$, $u\in\partial\Omega_{r_i}\cap K, i=1,2$. 故由引理 2.1 可知,当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时算子 A_λ 在 $u_1\in K\cap(\Omega_{r_3}\setminus\overline{\Omega}_{r_1})$ 和 $u_2\in K\cap(\Omega_{r_2}\setminus\overline{\Omega}_{r_4})$ 上至少有两个不动点 u_1, u_2,这时边值问题(2)的解满足

$$r_1\leqslant\|u_1\|\leqslant r_3<r_4\leqslant\|u_2\|\leqslant r_2.$$

定理 3.4 的证明

(i) 因为 $f_0<\infty$ 且 $f_\infty<\infty$,所以存在正数 μ,使得

$$f(u)\leqslant\mu u,\ u\in[0,1].$$

取 $\lambda_0=\left(\mu\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}$. 反设 $v(t)$ 是问题(2)的正解. 则当 $\lambda<\lambda_0$ 时

$$\|v\|=\|A_\lambda v\|< \lambda_0\|v\|\mu\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=\|v\|.$$

矛盾! 这表明当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时,问题(2)无解.

(ii) 因为 $f_0>0$ 且 $f_\infty>0$,所以存在正数 τ,使得

$$f(u)\geqslant\tau u, u\in[0,1].$$

取

$$\lambda_0=\left(\delta\sigma\tau G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

反设 $v(t)$ 是问题(2)的正解. 则当 $\lambda>\lambda_0$ 时

$$\|v\|=\|A_\lambda v\|> \lambda_0\delta\sigma\tau\|v\|G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=\|v\|.$$

矛盾! 这表明当 $\lambda>\lambda_0$ 时,问题(2)无解.

(iii) 若 $0<f_0<\infty$,则对任意的 $\vartheta>0$,存在 $r_1>0$,使得当 $0\leqslant u\leqslant r_1$ 时有 $\frac{f(u)}{u}<f_0+\vartheta$. 取

$$\lambda^*=\left((f_0+\vartheta)\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

记

$$\Omega_{r_1}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_1\}.$$

若当 $\lambda<\lambda^*$ 时 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$,则

$$A_\lambda u(t)\leqslant\lambda\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s< \lambda^*(f_0+\vartheta)\|u\|\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=\|u\|.$$

所以当 $\lambda<\lambda^*$ 时, $\|A_\lambda u\|<\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$. 因 $0<f_\infty<\infty$,对上述 $\vartheta>0$,存在 $\hat{H}_2>0$,使得当 $u\geqslant\hat{H}_2$ 时有

$$\frac{f(u)}{u}>f_\infty-\vartheta.$$

取

$$\lambda_*=\left((f_\infty-\vartheta)\sigma\delta G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

令

$$r_2:=\max\left\{2r_1,\frac{\hat{H}_2}{\sigma}\right\},$$

$$\Omega_{r_2}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_2\}.$$

若当 $\lambda>\lambda_*$ 时 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$，则

$$A_\lambda u(\frac{1}{2})=\lambda\int_0^1 G(\frac{1}{2},s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s>\lambda_*\sigma\delta(f_\infty-\vartheta)G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\|u\|\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=\|u\|.$$

所以当 $\lambda>\lambda_*$ 时有 $\|A_\lambda u\|>\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$. 从而由引理 2.1 可知，当 $\lambda_*<\lambda<\lambda^*$ 时算子 A_λ 在 $K\cap(\overline{\Omega}_{r_2}\backslash\Omega_{r_1})$ 上至少有一个不动点，即边值问题(2)至少存在一个正解.

类似定理 3.4 (i),(ii) 的证明，取

$$\lambda_{**}=\frac{1}{\mu\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s},$$

$$\lambda^{**}=\frac{1}{\delta\sigma\tau G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s}.$$

则当 $\lambda>\lambda^{**}$ 或 $0<\lambda<\lambda_{**}$ 时问题(2)没有正解.

定理 3.5 的证明

(i) 因为 $f_0=0$，取 $r_1>0$. 则当 $0\leqslant u\leqslant r_1$ 时有 $f(u)\leqslant\zeta u$，其中 $\zeta>0$. 取

$$\lambda^*=\left(\zeta\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

令

$$\Omega_{r_1}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_1\}.$$

若当 $\lambda<\lambda^*$ 时 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$，则

$$A_\lambda u(t)\leqslant\lambda\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\zeta\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)u(s)\mathrm{d}s<\lambda^*\zeta\|u\|\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=\|u\|.$$

所以 $\|A_\lambda u\|<\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$. 又 $f_\infty=\infty$，则存在 $\hat{H}_3>0$，使得当 $u>\hat{H}_3$ 时有 $f(u)\geqslant\kappa u$，其中 $\kappa>0$. 取

$$\lambda_*=\left(\kappa\sigma\delta G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

令

$$r_2:=\max\left\{2r_1,\frac{\hat{H}_3}{\sigma}\right\},$$

$$\Omega_{r_2}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_2\}.$$

若当 $\lambda>\lambda_*$ 时 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$，则

$$A_\lambda u(\frac{1}{2})=\lambda\int_0^1 G(\frac{1}{2},s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s>\lambda_*\delta\kappa\sigma G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\|u\|\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=\|u\|.$$

所以 $\|A_\lambda u\|>\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$. 从而由引理 2.1，当 $\lambda_*<\lambda<\lambda^*$ 时算子 A_λ 在 $K\cap(\overline{\Omega}_{r_2}\backslash\Omega_{r_1})$ 上至少有一个不动点，即边值问题(2)至少有一个正解.

(ii) 因为 $f_0=\infty$，取 $r_1>0$，使得当 $0<u\leqslant r_1$ 时有 $f(u)\geqslant\iota u,\iota>0$. 取

$$\lambda_*=\left(\delta\iota\sigma G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

记

$$\Omega_{r_1}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_1\}.$$

若当 $\lambda>\lambda_*$ 时 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$，则

$$A_\lambda u(\frac{1}{2})=\lambda\int_0^1 G(\frac{1}{2},s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s>\lambda_*\delta\iota\sigma G(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\|u\|\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s=\|u\|.$$

所以 $\|A_\lambda u\|>\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$. 若 $f_\infty=0$，则可取 $\hat{H}_4>0$，使得当 $u>\hat{H}_4$ 时有 $f(u)\leqslant\zeta u,\zeta>0$. 取

$$\lambda^*=\left(\zeta\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

我们分两种情况考虑.

第一种情况，函数 f 有界. 则存在常数 $N>0$，使得 $f(u)\leqslant N,u\geqslant 0$. 此时取

$$r_2:=\max\left\{2r_1,\lambda N\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

对当 $\lambda<\lambda^*$ 时 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$，有

$$A_\lambda u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda N\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\leqslant r_2.$$

于是 $\|A_\lambda u\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$.

第二种情况，f 无界. 此时取 $r_2>\max\{2r_1,\hat{H}_4\}$，使得 $f(u)\leqslant f(r_2),0<u\leqslant r_2$. 对 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$，有 $\|u\|=r_2$，且 $0\leqslant u(t)\leqslant r_2,t\in[0,1]$. 注意到 $r_2>\hat{H}_4$，则有

$$A_\lambda u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)\tilde{h}(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1 G(t,s)\tilde{h}(s)f(r_2)\mathrm{d}s<\lambda^*\zeta\int_0^1 G(s,s)\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\cdot r_2=r_2=\|u\|.$$

综上，无论函数 f 是有界还是无界，都可以令

$$\Omega_{r_2}:=\{u\in X|\ \|u\|<r_2\}.$$

所以当 $\lambda<\lambda^*$ 时 $\|A_\lambda u\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$. 从

而根据引理2.1,当$\lambda_* < \lambda < \lambda^*$时算子$A_\lambda$在$K\cap(\overline{\Omega}_{r_2}\backslash\Omega_{r_1})$上至少有一个不动点$u$,即边值问题(2)至少存在一个正解. 证毕.

4 例 子

例 4.1 考虑下列二阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+\dfrac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}u'(t)-\dfrac{1}{t(1-t)}u(t)+\lambda\dfrac{1}{t(1-t)}u^3=0, t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{9}$$

这里

$$a(t)=\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}},$$

$$b(t)=-h(t)=-\frac{1}{t(1-t)},$$

$$f(u)=u^3.$$

显然,问题满足条件$(A_1)\sim(A_3)$且$f_0=0$,$f_\infty=\infty$成立. 由定理3.5(i),存在λ_*,λ^*,使得当$\lambda_*<\lambda<\lambda^*$时,该边值问题至少存在一个正解.

例 4.2 考虑下列二阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''(t)-t^{p-1}(1-t)^{q-1}u(t)+ \\ \lambda t^{p-1}(1-t)^{q-1}e^u=0, t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

令

$$a(t)\equiv 0,$$

$$b(t)=-h(t)=-t^{p-1}(1-t)^{q-1}, p,q\in(0,1),$$

$$f(u)=e^u.$$

显然,问题满足条件$(A_1)\sim(A_3)$且$f_\infty=f_0=\infty$. 根据定理3.3(ii),存在$\lambda_0>0$,使得当$0<\lambda<\lambda_0$时,该边值问题至少存在两个正解.

参考文献:

[1] Sun J X, Zhang G W. Nontrivial solutions of singular superlinear Sturm-Liouville problems [J]. J Math Anal Appl, 2006, 312: 518.

[2] Sun J X, Zhang G W. Nontrivial solutions of singular sublinear Sturm-Liouville problems [J]. J Math Anal Appl, 2007, 326: 242.

[3] Cheng X Y, Dai G W. Positive solutions of sub-superlinear Sturm-Liouville problems [J]. Appl Math Comput, 2015, 261: 351.

[4] 叶芙梅. 一类非线性二阶常微分方程Dirichlet问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 3: 463.

[5] Hai D D. Positive solutions for a class of singular boundary-value problems [J]. Electron J Differ Equ, 2005, 13: 1.

[6] Li H Y, Sun J X. Positive solutions of sublinear Sturm-Liouville problems with changing sign nonlinearity [J]. Comput Math Appl, 2009, 58: 1808.

[7] Yang Z L. Existence of nontrivial solutions for a nonlinear Sturm-Liouville problem with integral boundary conditions [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 68: 216.

[8] Graef J R, Kong L J, Wang H Y. Existence, multiplicity, and dependence on a parameter for a periodic boundary value problem [J]. J Differ Equ, 2008, 245: 1185.

[9] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. Berlin: Spring-Verlag, 1985.

[10] Krasnosel′skii M A. Positive solutions of operator equations [M]. Groningen: P Noordhoff Ltd, 1964.

[11] Li J M, Wang J X. Triple positive solutions for a type of second-order singular boundary problems [J]. Bound Value Probl, 2010, 1: 1.

[12] Wang H Y. On the number of positive solutions of nonlinear systems [J]. J Math Anal Appl, 2003, 281: 287.

[13] 曹文娟, 李杰梅. 带一般微分算子的二阶奇异边值问题的正解[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2017, 55: 1367.

引用本文格式:

中 文: 曹文娟, 李杰梅, 温九红. 二阶奇异非线性特征值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 1148.

英 文: Cao W J, Li J M, Wen J H. Existence of positive solutions of second order singular nonlinear eigenvalue problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 1148.