doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.04.002

域 $\mathbf{Z}_3$ 上三维李双代数的 Atiyah class

申丹丹
（陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710119）

摘 要：本文基于李代数上同调与李双代数的 Atiyah class 的相关理论计算了域 $\mathbf{Z}_3$ 上所有三维李双代数的 Atiyah class.

关键词：李双代数；Atiyah class；r-矩阵
中图分类号：O154.2 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2019)04-0588-07

Atiyah classes of three-dimensional Lie bialgebras over $\mathbf{Z}_3$

SHEN Dan-Dan
(School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal Uiversity, Xi'an 710119, China)

Abstract: Based on the theory of Lie algebra cohomology and the definition of the Atiyah class of a Lie bialgebra, Atiyah classes of all three-dimensional Lie bialgebras over $\mathbf{Z}_3$ are calculated.

Keywords: Lie bialgebras; Atiyah class; r-matrix
(2010 MSC 17B62; 17B55)

1 引 言

为描述全纯向量丛上全纯联络存在的障碍，Atiyah[1]引入了 Atiyah class. 之后，众多学者对 Atiyah class 进行了更为广泛的研究. 例如，在文献[2]中，Molino 定义了一种叶状主丛的 Atiyah class. 在文献[3～5]中，Wang，Nguyen 和 Bordemann 研究了李代数对的 Atiyah class，并用其描述了齐次空间上不变联络的存在性. 在文献[6]中，Kapranov 用上同调与 Operad 理论进一步探究了 Atiyah class，并且指出：一个 Kähler 流形 X 的 Atiyah class 可以在 $\Omega_X^{0,\bullet-1}(T_X)$ 上诱导出一个 L_∞ 代数结构，这种代数结构在 Rozansky-Witten 理论体系中发挥着重要的作用. 在文献[7]中，Kontsevich 扩展了文献[6]中的内容与结论. 受 Kapranov 与 Kontsevich 的启发，Stiénon，陈和徐[8]对 Lie algebroid pairs 上的向量丛定义了 Atiyah class. 在文献[9]中，Metha，Stiénon 和徐定义并讨论了一个 dg-vector bundle 的 Atiyah class，并用这种 Atiyah class 证明了一个 dg-流形的向量空间具有一个自然的 L_∞[1]结构. 在文献[10]中，Voglaire 和徐通过 Atiyah class 对 Lie algebroid pairs 定义了 Rozansky-Witten 不变量. 在文献[11]中，Calaque 和 Van den Bergh 基于微分分次代数的相关理论对 Atiyah class 进行了探究. 在文献[12]中，洪阐述并探讨了李双代数的 Atiyah class.

李双代数是 Drinfel'd 在 1983 年提出的一个概念，之后受到了众多学者的关注与探究. 在文献[13]中，Machaelis 以李模的相关理论为基础，通过李代数构造出了李双代数. 在文献[14]中，Taft 给出了 Witt 与 Virasoro 这两种代数类型的李双代数结构. 在文献[15]中，Ng 与 Taft 对 Witt 与 Virasoro 这两种代数类型的李双代数进行了详细分类. Kosmann-Schwarzbach 在文献[16]中则详细介绍了李双代数的相关理论. 在文献

收稿日期：2018-09-16
基金项目：国家自然科学基金(11571211)；中央高校基金科研业务费专项基金(GK201803003)
作者简介：申丹丹(1994－)，女，硕士生，主要研究方向为李代数与数学物理. E-mail：shendandan@snnu.edu.cn

[17]中，洪和刘对所有的三维李双代数进行了详细分类.

在李双代数相关理论的基础上，对 Hamiton 动力学与 Poisson 李群进行探讨与理解将会更加深刻，且李双代数本身具有李代数与李余代数这两种代数结构，所以对李双代数进行探讨是极具意义的. 本文是文献[18]的延续研究. 文献[18]分别探讨了复数域与实数域上三维李双代数的 Atiyah class. 由于 $\mathbf{Z}_3$ 是有限域，探讨 $\mathbf{Z}_3$ 上李双代数的 Atiyah class 时需用到更为特殊的技巧. 本文将详细计算 $\mathbf{Z}_3$ 上所有三维李双代数的 Atiyah class.

2　预备知识

设 $\boldsymbol{F}$ 是一个域. 以下简要回顾李代数的 $\boldsymbol{g}$-模结构与李代数上同调的一些相关理论.

设 $\boldsymbol{g}$ 是域 $\boldsymbol{F}$ 上的一个李代数，向量空间 V 是一个 $\boldsymbol{g}$-模，如果存在一个同态映射 $\rho:\boldsymbol{g}\to \mathrm{End}V$ 满足

$$\rho([x,y])=[\rho(x),\rho(y)],\ \forall x,y\in\boldsymbol{g},$$

那么 $\boldsymbol{g}$ 在 V 上的作用映射可以用下式表示：

$$\boldsymbol{g}\times V\to V:(x,v)\to\rho(x)\cdot v,\ \forall x\in\boldsymbol{g},\forall v\in V.$$

有时候我们也把 $\rho(x)\cdot v$ 写成 $x\cdot v$ 的形式，实际上，(ρ,V)是 $\boldsymbol{g}$ 的一个表示.

设 $\boldsymbol{g}$ 是域 $\boldsymbol{F}$ 上的一个李代数，容易验证向量空间 $\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}$ 在以下定义的结构之下是一个 $\boldsymbol{g}$-模：

$$x\cdot(y\otimes z)=ad_x(y)\otimes z+y\otimes ad_x(z),\ \forall x,y,z\in\boldsymbol{g}.$$

由以上 $\boldsymbol{g}$-模结构的形式，我们也把 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}$ 上的作用称为伴随表示，用 $ad^{(2)}$ 来表示，即

$$ad^{(2)}:\boldsymbol{g}\to\mathrm{End}(\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}),x\to ad_x\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes ad_x,\ \forall x\in\boldsymbol{g}.$$

同样，易证向量空间 $\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$在如下结构之下也是一个 $\boldsymbol{g}$-模：

$$x\cdot(y\otimes T)=ad_x(y)\otimes T+y\otimes[-ad_x^*,T],\ \forall x,y\in\boldsymbol{g},\forall T\in End(\boldsymbol{g}^*).$$

设 $\boldsymbol{g}$ 是域 $\boldsymbol{F}$ 上的一个李代数，向量空间 V 是一个 $\boldsymbol{g}$-模，我们称

$$C^k(\boldsymbol{g},V)=\{f:\wedge^k\boldsymbol{g}\to V\,|\,f\text{ 是线性映射}\}(k\text{ 为非负整数})$$

是 $\boldsymbol{g}$ 的(V-值)k-上链空间.

定义映射 $\delta_k:C^k(\boldsymbol{g},V)\to C^{k+1}(\boldsymbol{g},V)$，

$$(\delta_k(f))(x_0\wedge x_1\wedge\cdots\wedge x_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\rho(x_i)f(x_0\wedge\cdots\wedge\hat{x}_i\wedge\cdots\wedge x_k)+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant k}(-1)^{i+j}f([x_i,x_j]\wedge x_0\wedge\cdots\wedge\hat{x}_i\wedge\cdots\wedge\hat{x}_j\wedge\cdots\wedge x_k),$$

$$\forall f\in C^k(\boldsymbol{g},V),\forall x_i\in\boldsymbol{g},0\leqslant i\leqslant k,$$

且 δ_k 之间的关系满足 $\delta_{k+1}\circ\delta_k=0$.

分析以下复形：

$$C^0(\boldsymbol{g},V)\xrightarrow{\delta_0}C^1(\boldsymbol{g},V)\xrightarrow{\delta_1}C^2(\boldsymbol{g},V)\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\delta_{k-1}}C^k(\boldsymbol{g},V)\xrightarrow{\delta_k}\cdots.$$

当 $k\geqslant0$ 时，对于 $f\in C^k(\boldsymbol{g},V)$，如果 $\delta_kf=0$，则我们把 k-上链 f 称为 k-上循环；当 $k\geqslant1$ 时，如果存在$(k-1)$-上链 $u\in C^{k-1}(\boldsymbol{g},V)$，有 $\delta_{k-1}u=f$ 成立，则我们把 k-上链 f 称为 k-上边缘. 由此我们可知：k-上边缘一定是 k-上循环.

当 $k=0$ 时，$C^0(\boldsymbol{g},V)=V$，则对任意 $v\in V$，$x\in\boldsymbol{g}$，$\delta_0v(x)=x\cdot v$；当 $k=1$ 时，对任意 $x,y\in\boldsymbol{g}$，$\forall f\in C^1(\boldsymbol{g},V)$，有

$$\delta_1f(x\wedge y)=x\cdot f(y)-y\cdot f(x)-f([x,y]).$$

由以上复形，我们称

$$H^k(\boldsymbol{g},V)=\ker(\delta_k)/\operatorname{Im}(\delta_{k-1}),\ k\geqslant1$$

为复形的第 k 个上同调.

以下回顾李双代数的相关理论.

定义 2.1　设 $\boldsymbol{g}$ 是域 $\boldsymbol{F}$ 上的一个李代数，在 $\boldsymbol{g}$ 上赋予如下定义的余括号 $\gamma:\boldsymbol{g}\to\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{g}$，

$$\langle\gamma(x),\xi\wedge\eta\rangle=\langle[\xi,\eta],x\rangle,\ \forall\xi,\eta\in\boldsymbol{g}^*,\ \forall x\in\boldsymbol{g},$$

并且满足兼容性条件

$$\gamma([x,y])=x\cdot\gamma(y)-y\cdot\gamma(x),$$

则将李代数 $\boldsymbol{g}$ 称为一个李双代数. 也可以将李双代数记为$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$. 在下文中我们用二元素组$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$来表示李双代数.

注 1　由以上定义可知：李双代数既具有李代数的结构也具有李余代数的结构，因而是具有双重结构的向量空间. 由于

$$\delta_1\gamma(x\wedge y)=x\cdot\gamma(y)-y\cdot\gamma(x)-\gamma([x,y]),\ \forall x,y\in\boldsymbol{g},$$

由 γ 满足的兼容性条件可知

$$\delta_1\gamma(x\wedge y)=0,\forall x,y\in\boldsymbol{g},$$

即 $\delta_1\gamma=0$，也就是 $\gamma:\boldsymbol{g}\to\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{g}$ 是 1-上循环.

如果存在 $R\in\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{g}$，有 $\gamma=\delta_0R$ 成立，那么 1-上循环 γ 也是 1-上边缘，我们称此 $R\in\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{g}$ 为 r-矩阵.

为确定李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$中$\boldsymbol{g}$与$\boldsymbol{g}^*$的具体结构以及映射$\gamma$的具体形式，我们先定义一种缩并映射如下：$\forall x\in\boldsymbol{g},W\in\wedge^k\boldsymbol{g}^*$，定义映射$i_x:\wedge^k\boldsymbol{g}^*\rightarrow\wedge^{k-1}\boldsymbol{g}^*$，设$W=\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_k,\eta_j\in\boldsymbol{g}^*,j=1,2,\cdots k$，则

$$i_xW=i_x(\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_k)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\langle\eta_j,x\rangle\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\hat{\eta}_j\wedge\cdots\wedge\eta_k.$$

同样，$\forall\varphi\in\boldsymbol{g}^*,X\in\wedge^k\boldsymbol{g}$，定义$i_\varphi:\wedge\boldsymbol{g}^k\rightarrow\wedge^{k-1}\boldsymbol{g}$，设$X=x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_k,x_j\in\boldsymbol{g},j=1,2,\cdots k$，则

$$i_\varphi X=i_\varphi(x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_k)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\langle\varphi,x_j\rangle x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge\hat{x}_j\wedge\cdots\wedge x_k.$$

引理2.2[17] 设$\boldsymbol{g}$与$\boldsymbol{g}^*$是域$\boldsymbol{F}$上三维李代数，它们的李括号结构由下式确定：

$$[x,y]\triangleq i_\kappa(x\wedge y)+A(i_{x\wedge y}V^*),\forall x,y\in\boldsymbol{g},V^*\in\wedge^3\boldsymbol{g}^*,$$

$$[\alpha,\beta]\triangleq i_\xi(\alpha\wedge\beta)+B(i_{\alpha\wedge\beta}V),\forall\alpha,\beta\in\boldsymbol{g}^*,V\in\wedge^3\boldsymbol{g},$$

其中$\kappa\in\boldsymbol{g}^*,\xi\in\boldsymbol{g},A=A^*:\boldsymbol{g}^*\rightarrow\boldsymbol{g},B=B^*:\boldsymbol{g}\rightarrow\boldsymbol{g}^*$，且满足$A\kappa=0,B\xi=0$.

定理2.3 设$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$是域$\boldsymbol{F}$上三维李双代数. 则其带有的线性映射$\gamma:\boldsymbol{g}\rightarrow\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{g}$的具体形式可由下式确定：$\forall x\in\boldsymbol{g},\xi\in\boldsymbol{g},V\in\wedge^3\boldsymbol{g}$,有

$$\gamma(x)=\xi\wedge x+i_{Bx}(V).$$

证明 由引理2.2对任意的$\alpha,\beta\in\boldsymbol{g}^*$，我们有

$$\begin{aligned}&\langle\alpha\wedge\beta,\gamma(x)\rangle=\langle[\alpha,\beta],x\rangle,\forall x,y\in\boldsymbol{g}=\\&\langle i_\xi(\alpha\wedge\beta)+B(i_{\alpha\wedge\beta}V),x\rangle=\\&\quad\langle\langle\xi,\alpha\rangle\beta-\langle\xi,\beta\rangle\alpha,x\rangle+\langle Bi_{\alpha\wedge\beta}V,x\rangle=\\&\quad\langle\xi,\alpha\rangle\langle\beta,x\rangle-\langle\xi,\beta\rangle\langle\alpha,x\rangle+\langle i_{Bx}V,\alpha\wedge\beta\rangle=\\&\quad\langle\alpha\wedge\beta,\xi\wedge x\rangle+\langle i_{Bx}V,\alpha\wedge\beta\rangle=\\&\quad\langle\alpha\wedge\beta,\xi\wedge x+i_{Bx}V\rangle.\end{aligned}$$

由此得到$\gamma(x)=\xi\wedge x+i_{Bx}(V)$成立. 证毕.

在李双代数相关理论的基础上，以下我们讨论李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$的Atiyah class. 设$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$是李双代数，定义$\boldsymbol{g}$-模间映射：

$$F=\mathrm{id}\otimes(-ad^*):\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}\rightarrow\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*),\quad x\otimes y\rightarrow x\otimes(-ad_y^*),$$

容易证明F是$\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}$到$\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$的同态映射，由$F$诱导出一个映射

$$F_*:H^1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g})\rightarrow H^1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*))$$

满足：$\forall\alpha\in H^1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}),\forall x\in\boldsymbol{g}$，有

$$F_*(\alpha)x=F(\alpha(x)).$$

因为F是$\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}$到$\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$的映射，所以$F\circ\gamma(x)\in\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$，即$F\circ\gamma(x)\in C^1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*))$.

设$\lambda\in\boldsymbol{g}^*\otimes\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$，且$\lambda$满足$\lambda(x,\mu)=ad^*_{ad^*_\mu(x)}\in\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*),\forall x\in\boldsymbol{g},\mu\in\boldsymbol{g}^*$. 实际上，$\lambda$是$\boldsymbol{g}$到$\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$的一个映射，即$\lambda\in C^1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*))$. 由文献[12]中定理1.1可知：$\lambda=-F\circ\gamma$. 那么$[\lambda]=-[F\circ\gamma]=-F_*[\gamma]\in H^1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*))$. 至此，我们给出以下定义：

定义2.4 我们把上同调类$[\lambda]\in H^1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*))$称为李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$的Atiyah class.

3 主要结果

在文献[17]的附表III中，洪与刘已经对域$\mathbf{Z}_3$上所有三维李双代数详细分类，这里$\mathbf{Z}_3=\{0,1,-1\}=\{0,1,2\}$. 本文将对$\mathbf{Z}_3$上每一类李双代数的Atiyah class进行计算. 在已经了解李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$中$\boldsymbol{g}$与$\boldsymbol{g}^*$的李括号结构以及映射$\gamma$具体形式的基础上，以下我们给出判断李双代数的Atiyah class是否为0的等价条件，并由此给出以下定理：

定理3.1 若三维李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$存在$r$-矩阵$R\in\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{g}$，则此李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$的Atiyah class等于0.

证明 因为$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$存在$r$-矩阵$R\in\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{g}$，则有$\gamma=\delta_0R$成立. 又因为$\delta_1\circ\delta_0=0$，从而有$\delta_1\gamma=0$，即$[\gamma]=0$. 由定义2.4知$[\lambda]=-F_*[\gamma]=0$. 则具有$r$-矩阵的李双代数的Atiyah class为0. 证毕.

注2 以上定理只给出了判断李双代数的Atiyah class是否等于0的充分条件而非必要条件.

由文献[12]的定理3.4可知：李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$的Atiyah class $[\lambda]=0$可等价为存在线性映射$S:\boldsymbol{g}^*\rightarrow\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$，使得下式成立：

$$\lambda(x,\mu)=ad_x^*\cdot S(\mu)-S(\mu)\cdot ad_x^*-S(ad_x^*(\mu)),\forall x\in\boldsymbol{g},\mu\in\boldsymbol{g}^*.$$

但按照上式寻找满足条件的S的计算过程较为复杂. 为简化计算，我们给出以下判断李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$的Atiyah class是否为0的等价条件：

定理3.2 三维李双代数$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}^*)$的Atiyah class $[\lambda]=0$等价于存在一个线性映射$S:\boldsymbol{g}^*\rightarrow$

$\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$，使得对任意 $x\in\boldsymbol{g}$，有 $F\circ\gamma(x)=x\cdot S$ 成立.

证明　因为 S 是 $\boldsymbol{g}^*$ 到 $\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$的映射，令 $S\in\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$. 那么

$$\lambda(x,\mu)=ad_x^*\cdot S(\mu)-S(\mu)\cdot ad_x^*-S(ad_x^*(\mu)),\ \forall x\in\boldsymbol{g},\mu\in\boldsymbol{g}^*$$

等价于 $\lambda(x)=-x\cdot S,\forall x\in\boldsymbol{g}$. 又由文献[12]中定理 1.1 可知：$\lambda=-F\circ\gamma$. 由以上两式有 $F\circ\gamma(x)=x\cdot S,\forall x\in\boldsymbol{g}$. 证毕.

下面我们将对域 $\mathbf{Z}_3$ 上三维李双代数的 Atiyah class 进行详细计算. 为方便计算，设$\{e_1,e_2,e_3\}$与$\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$分别是三维李代数 $\boldsymbol{g}$ 与 $\boldsymbol{g}^*$ 的一组基. 由 $V\in\wedge^3\boldsymbol{g},V^*\in\wedge^3\boldsymbol{g}^*$，我们令 $V=e_1\wedge e_2\wedge e_3$，$V^*=e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*$. 由定理 3.2，我们需要证明映射 S 的存在性. 在此采用反证法. 首先假设存在 $S\in\boldsymbol{g}\otimes\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$ 且

$$S=e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3,\ T_1,T_2,T_3\in\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*),$$

$$T_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\ T_2=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix},$$

$$T_3=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij},b_{ij},c_{ij}\in\mathbf{Z}_3$，i,j=1,2,3.

以下我们给出几例域 $\mathbf{Z}_3$ 上三维李双代数 Atiyah class 的详细计算过程. 需注意的是在域 $\mathbf{Z}_3$ 中，2 的逆元是 2(或−1).

例 3.3　计算 $A=\mathrm{diag}(1,1,0)$，$\kappa^t=0$，$B=\mathrm{diag}(0,0,1)$，$\xi^t=0$ 这一类型的三维李双代数的 Atiyah class 是否为 0.

首先，由引理 2.2 通过结算得到

$$[e_1,e_2]=0,[e_2,e_3]=e_1,[e_3,e_1]=e_2,$$
$$[e_1^*,e_2^*]=e_3^*,[e_2^*,e_3^*]=0,[e_3^*,e_1^*]=0.$$

又由

$$ad_{e_1}e_1=0,ad_{e_1}e_2=0,ad_{e_1}e_3=-e_2,$$
$$ad_{e_2}e_1=0,ad_{e_2}e_2=0,ad_{e_2}e_3=e_1,$$
$$ad_{e_3}e_1=e_2,ad_{e_3}e_2=-e_1,ad_{e_3}e_3=0$$

可得

$$ad_{e_1}^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$ad_{e_2}^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$ad_{e_3}^*=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

由定理 2.3，经过计算得

$$\gamma(e_1)=0,\gamma(e_2)=0,\gamma(e_3)=e_1\wedge e_2,$$

即

$$F\circ\gamma(e_1)=0,$$
$$F\circ\gamma(e_2)=0,$$
$$F\circ\gamma(e_3)=e_1\otimes(-ad_{e_2}^*)-e_2\otimes(-ad_{e_1}^*).$$

又

$$e_1\cdot S=e_1\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=e_1\otimes[-ad_{e_1}^*,T_1]+e_2\otimes([-ad_{e_1}^*,T_2]-T_3)+e_3\otimes[-ad_{e_1}^*,T_3],$$

$$e_2\cdot S=e_2\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=e_1\otimes([-ad_{e_2}^*,T_1]+T_3)+e_2\otimes[-ad_{e_2}^*,T_2]+e_3\otimes[-ad_{e_2}^*,T_3],$$

$$e_3\cdot S=e_3\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=e_1\otimes([-ad_{e_3}^*,T_1]-T_2)+e_2\otimes([-ad_{e_3}^*,T_2]+T_1)+e_3\otimes[-ad_{e_3}^*,T_3].$$

因此，要使对任意 $x\in\boldsymbol{g}$ 有 $F\circ\gamma(x)=x\cdot S$ 成立，则需满足

$$F\circ\gamma(e_1)=e_1\cdot S,$$
$$F\circ\gamma(e_2)=e_2\cdot S,$$
$$F\circ\gamma(e_3)=e_3\cdot S,$$

即下列九式必须同时成立：

1) $[-ad_{e_1}^*,T_1]=0$；2) $[-ad_{e_1}^*,T_2]-T_3=0$；

3) $[-ad_{e_1}^*,T_3]=0$；4) $[-ad_{e_2}^*,T_1]+T_3=0$；

5) $[-ad_{e_2}^*,T_2]=0$；6) $[-ad_{e_2}^*,T_3]=0$；

7) $[-ad_{e_3}^*,T_1]-T_2=-ad_{e_2}^*$；

8) $[-ad_{e_3}^*,T_2]+T_1=ad_{e_1}^*$；

9) $[-ad_{e_3}^*,T_3]=0$.

在对 1)，3)，5)，6)，9)，2)，4)式计算，得到简化的 T_1,T_2,T_3，再将其代入 8)式得到

$$a_{32}+b_{31}=-1.$$

而代入 7)式后得到 $a_{32}+b_{31}=1$. 矛盾. 因此不存在满足条件的 T_1,T_2,T_3 使得上面九个式子同时成立，即不存在符合条件的 S，使得式子 $F\circ\gamma(x)=x\cdot S$，$\forall x\in\boldsymbol{g}$ 成立. 因而这一类型的李双代数的 Atiyah class $[\lambda]\neq0$.

例 3.4　计算 $A=\mathrm{diag}(1,0,0)$，$\kappa^t=0$，$B=\mathrm{diag}(0,1,1)$，$\xi^t=0$ 这一类型的三维李双代数的

Atiyah class 是否为 0.

由引理 2.2,计算可得

$[e_1,e_2]=0,[e_2,e_3]=e_1,[e_3,e_1]=0,$

$[e_1^*,e_2^*]=e_3^*,[e_2^*,e_3^*]=0,[e_3^*,e_1^*]=e_2^*.$

又由

$ad_{e_1}e_1=0,ad_{e_1}e_2=0,ad_{e_1}e_3=0,$

$ad_{e_2}e_1=0,ad_{e_2}e_2=0,ad_{e_2}e_3=e_1,$

$ad_{e_3}e_1=0,ad_{e_3}e_2=-e_1,ad_{e_3}e_3=0,$

可得

$$ad_{e_1}^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$ad_{e_2}^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$ad_{e_3}^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

由定理 2.3,计算可知

$\gamma(e_1)=0,\ \gamma(e_2)=e_3\wedge e_1,\gamma(e_3)=e_1\wedge e_2,$

即

$F\circ\gamma(e_1)=0,$

$F\circ\gamma(e_2)=e_3\otimes(-ad_{e_1}^*)-e_1\otimes(-ad_{e_3}^*),$

$F\circ\gamma(e_3)=e_1\otimes(-ad_{e_2}^*)-e_2\otimes(-ad_{e_1}^*).$

又

$e_1\cdot S=0,$

$e_2\cdot S=e_1\otimes([-ad_{e_2}^*,T_1]+T_3)+$
$e_2\otimes[-ad_{e_2}^*,T_2]+e_3\otimes[-ad_{e_2}^*,T_3],$

$e_3\cdot S=e_1\otimes([-ad_{e_3}^*,T_1]-T_2)+$
$e_2\otimes[-ad_{e_3}^*,T_2]+e_3\otimes[-ad_{e_3}^*,T_3].$

要使 $F\circ\gamma(x)=x\cdot S,\forall x\in\boldsymbol{g}$ 成立需要以下六个式子同时成立:

1) $[-ad_{e_2}^*,T_1]+T_3=ad_{e_3}^*$;

2) $[-ad_{e_2}^*,T_2]=0$;

3) $[-ad_{e_2}^*,T_3]=-ad_{e_1}^*$;

4) $[-ad_{e_3}^*,T_1]-T_2=-ad_{e_2}^*$;

5) $[-ad_{e_3}^*,T_2]=ad_{e_1}^*$;

6) $[-ad_{e_3}^*,T_3]=0.$

经计算,当

$$T_1=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$T_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\b_{21}&0&0\\b_{31}&0&0\end{pmatrix},$$

$$T_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\c_{21}&0&0\\c_{31}&0&0\end{pmatrix}$$

时,其中 $a_{ij},b_{ij},c_{ij}\in\mathbf{Z}_3$, $i,j=1,2,3$, 且 a_{ij},b_{ij},c_{ij} 满足下列四式时:

$a_{11}-a_{22}-b_{21}=0$;

$a_{32}+b_{31}-1=0$;

$a_{33}-a_{11}+c_{31}=0$;

$a_{23}+c_{21}+1=0,$

存在满足条件的 $S:\boldsymbol{g}\to\mathrm{End}(\boldsymbol{g}^*)$使得

$F\circ\gamma(x)=x\cdot S,\forall x\in\boldsymbol{g}$

成立,即这一类型的三维李双代数的 Atiyah class $[\lambda]=0$.

在域 $\mathbf{Z}_3$ 上,其余类型的李双代数的 Atiyah class 可以根据上述两例的过程进行计算,在此不一一进行详细计算,可参考文献[17]中附表Ⅲ对域 $\mathbf{Z}_3$ 上三维李双代数的分类情况. 本文将域 $\mathbf{Z}_3$ 上三维李双代数按照是否存在 r-矩阵进行了整理,详见下列表Ⅰ与表Ⅱ.

注 3 文献[17]中附表Ⅲ就 $\kappa^t=(0,0,1)$, $A=\mathrm{diag}(1,1,0)$, $B=\mathrm{diag}(0,0,1)$, $\xi^t=0$ 以及 $\kappa^t=(0,0,1)$, $A=\mathrm{diag}(1,0,0)$, $B=\mathrm{diag}(0,0,\pm1)$, $\xi^t=0$ 这两种类型的李双代数是否存在 r-矩阵出现遗漏,现将其补充完整,详见下表.

表 1 不存在 r-矩阵的情形

Tab. 1 Cases without r-matrix

类型	κ^t	A	B	ξ^t	Atiyah class
1	(0,0,1)	0	diag(1,1,1)	0	$[\lambda]\neq0$
2	(0,0,1)	0	diag(1,−1,1)	0	$[\lambda]\neq0$
3	(0,0,1)	0	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	0	$[\lambda]\neq0$
4	(0,0,1)	0	diag(0,1,1)	0	$[\lambda]\neq0$

(续表 1)

类型	κ^t	A	B	ξ^t	Atiyah class
5	(0,0,1)	0	diag(1,1,0)	0	$[\lambda]\neq 0$
6	(0,0,1)	0	diag(1,−1,0)	0	$[\lambda]\neq 0$
7	(0,0,1)	0	diag(0,1,−1)	0	$[\lambda]\neq 0$
8	(0,0,1)	0	diag(1,0,0)	0	$[\lambda]\neq 0$
9	(0,0,1)	diag(1,1,0)	±diag(1,1,0)	(0,0,±1)	$[\lambda]\neq 0$
10	(0,0,1)	diag(1,−1,0)	±diag(1,−1,0)	(0,0,±1)	$[\lambda]\neq 0$
11	(0,0,1)	diag(1,0,0)	±diag(0,1,1)	0	$[\lambda]\neq 0$
12	(0,0,1)	diag(1,0,0)	±diag(0,1,−1)	0	$[\lambda]\neq 0$
13	(0,0,1)	diag(1,0,0)	diag(0,±1,0)	0	$[\lambda]\neq 0$
14	0	diag(1,1,0)	diag(0,0,1)	0	$[\lambda]\neq 0$
15	0	diag(1,1,0)	0	(0,0,1)	$[\lambda]\neq 0$
16	0	diag(1,1,0)	diag(0,0,1)	(1,0,0)	$[\lambda]\neq 0$
17	0	diag(1,1,0)	diag(0,0,1)	(1,1,0)	$[\lambda]\neq 0$
18	0	diag(1,−1,0)	diag(0,0,1)	0	$[\lambda]\neq 0$
19	0	diag(1,−1,0)	0	(0,0,1)	$[\lambda]\neq 0$
20	0	diag(1,−1,0)	diag(0,0,1)	(1,0,0)	$[\lambda]\neq 0$
21	0	diag(1,−1,0)	diag(0,0,1)	(0,1,0)	$[\lambda]\neq 0$
22	0	diag(1,−1,0)	diag(0,0,1)	(1,1,0)	$[\lambda]\neq 0$
23	0	diag(1,0,0)	diag(0,1,1)	0	$[\lambda]=0$
24	0	diag(1,0,0)	diag(0,1,−1)	0	$[\lambda]=0$
25	0	diag(1,0,0)	diag(0,0,1)	0	$[\lambda]=0$
26	0	diag(1,0,0)	0	(0,0,1)	$[\lambda]\neq 0$
27	0	diag(1,0,0)	0	(1,0,0)	$[\lambda]=0$
28	0	diag(1,0,0)	diag(0,1,1)	(1,0,0)	$[\lambda]=0$
29	0	diag(1,0,0)	diag(0,1,−1)	(1,0,0)	$[\lambda]=0$
30	0	diag(1,0,0)	diag(0,0,1)	(±1,0,0)	$[\lambda]=0$
31	0	diag(1,0,0)	diag(0,0,1)	(0,±1,0)	$[\lambda]\neq 0$

表 2 存在 r-矩阵的情形 (在这种情形下 Atiyah class 为 0)

Tab. 2 Cases with existence of r-matrix (The Atiyah class must be zero in these cases)

类型	κ^t	A	B	ξ^t	r-矩阵
1	(0,0,1)	0	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	0	$e_3\wedge e_1$
2	(0,0,1)	0	diag(0,0,1)	0	$-e_1\wedge e_2$
3	(0,0,1)	diag(1,1,0)	diag(0,0,1)	0	$-e_1\wedge e_2$
4	(0,0,1)	diag(1,−1,0)	diag(0,0,1)	0	$-e_1\wedge e_2$
5	(0,0,1)	diag(1,−1,0)	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&\pm1\\1&\pm1&0\end{pmatrix}$	(−1,±1,0)	$e_2\wedge e_3\pm e_3\wedge e_1$
6	(0,0,1)	diag(1,0,0)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	0	$e_3\wedge e_1$
7	(0,0,1)	diag(1,0,0)	diag(0,0,±1)	0	$\pm e_1\wedge e_2$
8	0	diag(1,1,1)	0	(1,0,0)	$-e_2\wedge e_3$
9	0	diag(1,1,1)	0	(1,1,0)	$-e_2\wedge e_3-e_3\wedge e_1$
10	0	diag(1,1,1)	0	(1,1,1)	$-e_2\wedge e_3-e_3\wedge e_1-e_1\wedge e_2$
11	0	diag(1,1,0)	0	(1,0,0)	$-e_2\wedge e_3$
12	0	diag(1,−1,0)	0	(1,0,0)	$-e_2\wedge e_3$

13	0	diag(1,−1,0)	0	(1,1,0)	$-e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_1$

参考文献:

[1] Atiyah M F. Complex analytic connections in fibre bundles [J]. Trans Amer Math Soc, 1957, 85: 181.

[2] Molino P. Classe d′ Atiyah d′ un feuilletage et connexions transverses projetables [J]. C R Acad Sci Paris Sér A-B, 1971, 272: A779.

[3] Wang H C. On invariant connections over a principal fibre bundle [J]. Nagoya Math J, 1958, 13: 1.

[4] Nguyen V H. Relations entre les diverses obstructions relations àl′ existence d′ une connexion linéaire invariante sur un expace homogène [J]. C R Acad Sci Paris, 1965, 260: 45.

[5] Bordemann M. Atiyah classes and equivariant connections on homogeneous spaces [J]. Trav Math, 2012, 20: 29.

[6] Kapranov M M. Rozansky-Witten invariants via Atiyah classes [J]. Compos Math, 1999, 115: 71.

[7] Kontsevich M. Rozansky-Witten invariants via formal geometry [J]. Compos Math, 1999, 115: 115.

[8] Chen Z, Stiénon M, Xu P. From Atiyah classes to homotopy Leibniz algebras [J]. Comm Math Phys, 2016, 341: 309.

[9] Metha R A, Stiénon M, Xu P. The Atiyah class of a dg-vector bundle [J]. C R Math Acad Sci Paris, 2015, 353: 357.

[10] Voglaire Y, Xu P. Rozansky-Witten-type invariants from symplectic Lie pairs [J]. Comm Math Phys, 2015, 336: 217.

[11] Calaque D, Van den Bergh M. Hochschild cohomology and Atiyah classes [J]. Adv Math, 2010, 224: 1839.

[12] Hong W. Atiyah classes of Lie bialgbras [J]. J Lie Theory, 2019, 29: 263.

[13] Michaelis W. A class of infinite-dimensional Lie bialgebras containing the Virasoro algebra [J]. Adv Math, 1994, 107: 365.

[14] Taft E J. Witt and Virasoro algebras as Lie bialgebras [J]. J Pure Appl Algebra, 1993, 87: 301.

[15] Ng S H, Taft E J. Classification of the Lie bialgebras structures on the Witt and Virasoro algebras [J]. J Pure Appl Algebra, 2000, 151: 67.

[16] Kosmann-Schwarzbach Y. Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations [C]// Integrability of nonlinear systems (Pondicherry 1996), Berlin: Springer, 1997: 104.

[17] Hong W, Liu Z J. Lie bialgebras on k^3 and Lagrange varieties [J]. J Lie Theory, 2009, 19: 639.

[18] 李平,乔雨. 复数域上三维李双代数的 Atiyah class [J]. 吉林大学学报, 2019, 1: 21.

引用本文格式:

中 文: 申丹丹. 域 $\mathbf{Z}_3$ 上三维李双代数的 Atiyah class [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 588.

英 文: Shen D D. Atiyah classes of three-dimensional Lie bialgebras over $\mathbf{Z}_3$ [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 588.