2019 年 7 月 四川大学学报(自然科学版) Jul. 2019
第 56 卷 第 4 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 56 No. 4

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.04.003

对数 Bloch 型空间上的积分型算子的缠绕关系

韩学红，曾红刚
(天津大学数学学院，天津 300354)

摘　要：本文研究对数 Bloch 型空间上的复合算子 C_φ 对一类积分型算子 I_g 的缠绕关系，给出了 C_φ(紧的)缠绕 I_g 和 I_h 的等价条件.

关键词：对数 Bloch 型空间；缠绕关系；复合算子；积分型算子
中图分类号：O177.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)04-0595-05

Intertwining relation of integral-type operators on logarithmic Bloch-type spaces

HAN Xue-Hong, *ZENG Hong-Gang*
(School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300354, China)

Abstract: In this paper, we study the intertwining relation of a class of integral-type operators by composition operators on logarithmic Bloch-type space and give the equivalent conditions of C_φ(compact) intertwining I_g and I_h.

Keywords: Logarithmic Bloch-type space; Intertwining relation; Composition operator; Integral-type operator
(2010 MSC 47B38; 47B33; 32H02)

1 引　言

设 X 和 Y 都是 Banach 空间. $B(X,Y)$表示从 X 到 Y 的有界线性算子的全体，$K(X,Y)$表示 $B(X,Y)$中紧算子的全体. 对 $A\in B(X,X)$，$B\in B(Y,Y)$和 $0\neq T\in B(X,Y)$，若 $TA=BT$，则称 T 缠绕 A 和 B，T 称为缠绕算子；若 $TA=BT (\mathrm{mod}\ K(X,Y))$，则称 T 紧的缠绕 A 和 B.

Bourdon 和 Shapiro 在文献[1]中研究了解析 Toeplitz 算子的缠绕关系. 其后，Tong 和 Zhou 在文献[2]中研究了 Bergman 空间上 Volterra 算子的缠绕关系. 本文将讨论对数 Bloch 型空间上一类积分型算子的缠绕关系，即上述定义中的 A,B 为积分型算子而缠绕算子 T 为复合算子的情形.

下面先给出这两类算子的定义. 设 D 为复平面上的单位圆，即 $D=\{z:|z|<1\}$. $S(D)$和 $H(D)$分别表示 D 上的解析自映射和解析函数组成的集合. 设 $\varphi\in S(D)$，$f,g\in H(D)$. 复合算子 C_φ 和积分型算子 I_g 分别定义为：

$$C_\varphi f(z) = f(\varphi(z)),$$

$$I_g f(z) = \int_0^z f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

本文中 C_φ 和 I_g 作用的函数空间为对数 Bloch 型空间 LB^α. 设 $0<\alpha<\infty$，$f\in LB^\alpha \Leftrightarrow f\in H(D)$且

$$\|f\|_\alpha \overset{\Delta}{=\!=} \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha \ln\frac{2}{1-|z|^2} |f'(z)|<\infty.$$

收稿日期：2018-09-25
基金项目：国家自然科学基金(11301373)
作者简介：韩学红(1994－)，女，山西大同人，硕士研究生，主要研究方向为算子理论. E-mail：hxhcrystal@163.com
通讯作者：曾红刚. E-mail：zhgng@tju.edu.cn

令

$$\|f\|_{LB^\alpha}=|f(0)|+\|f\|_\alpha.$$

易知 LB^α 以 $\|f\|_{LB^\alpha}$ 为范数且为 Banach 空间[3]. 在本文中我们只考虑 $0<\alpha<1$ 的情形. 关于 Bloch 型空间及复合算子的相关研究,读者可参考文献[4]和[5].

此外,本文还涉及到加权的有界解析函数空间,即 $H_\alpha^\infty(0<\alpha<\infty)$. $f\in H_\alpha^\infty$ 是指 $f\in H(D)$ 且 $\|f\|_{H_\alpha^\infty}=\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha|f(z)|<\infty$.

本文拟研究下面两个问题:

问题 1: C_φ 缠绕 I_g 和 I_h 的等价条件是什么?

问题 2: C_φ 何时紧缠绕 I_g 和 I_h?

为叙述方便,我们引入下面的定义. 对两个复合算子 $C_\psi\in B(LB^\alpha,LB^\alpha)$ 和 $C_\varphi\in B(LB^\beta,LB^\beta)$, 积分型算子 $I_g,I_h\in B(LB^\alpha,LB^\beta)$. 算子 $I[\varphi,\psi;g,h]:LB^\alpha\to LB^\beta$ 定义为 $I[\varphi,\psi;g,h]=C_\varphi I_g-I_hC_\psi$. 当 $\alpha=\beta$ 且 $\varphi=\psi$ 时,记为 $I[\varphi;g,h]$, 即 $I[\varphi;g,h]=C_\varphi I_g-I_hC_\varphi$.

需要说明的是,在上述符号意义下,我们的问题等价于算子 $C_\varphi I_g$ 与算子 I_hC_φ 的差分何时是紧的问题. 近年来,有不少学者致力于研究两个复合算子差分的紧性问题. 如,2005 年 Moorhouse[6] 刻画了加权 Bergman 空间上复合算子差分的紧性. 2007 年 Hosokawa 和 Ohno[7] 研究了 Bloch 空间上复合算子差分的有界性和紧性问题. 其后, Fang[8], Liang[9] 和 Song[10] 等分别研究了不同多复变量函数空间上(加权)复合算子的差分问题. 此外,也有讨论复合算子与积分型算子的乘积算子的差分问题,如文献[11]和[12]. 本文将沿着文献[2],[11]和[12]的思路在第 3 节给出问题 1 和问题 2 的回答.

下文用到的符号中,总是假设 $0<\alpha\leqslant\beta<1$, $\varphi,\psi\in S(D)$ 和 $g,h\in H(D)$.

2 预备知识

下面的引理表明 LB^α 上的点赋值泛函是有界的.

引理 2.1[3] 对任意的 $f\in LB^\alpha$, $z\in D$, 有

$$|f(z)|\leqslant\left(1+\frac{1}{(1-\alpha)\ln 2}\right)\|f\|_{LB^\alpha}.$$

下面的两个引理给出后面证明中要用到的两个检验函数,其具体证明都见于文献[3].

引理 2.2[3] 设 $\omega\in D$, 函数

$$f_\omega(z)=\int_0^z\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{|\omega|^2}z^2\right)^{-\alpha}\cdot\left(\ln\frac{4}{1-\frac{\bar{\omega}^2}{|\omega|^2}z^2}\right)-1\mathrm{d}z,$$

则 $f_\omega(z)\in LB^\alpha$.

引理 2.3[3] 设 $z\in D$, $0<r_n<1$, $\theta_n\in\mathbf{R}$, 函数

$$f_n(z)=\int_0^z\left(\frac{r_n}{1-r_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n}\omega}-\frac{r_n^2}{1-r_n^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n}\omega}\right)^\alpha\cdot\left(\ln\frac{4}{1-r_n^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n}\omega}\right)^{-1}d\omega,$$

则 $\{f_n\}$ 是 LB^α 上内闭一致收敛于 0 的有界序列.

在我们的讨论中要求积分型算子是有界的. 下面的引理给出 I_g 有界的充要条件,同时也表明要求 $\beta\geqslant\alpha$ 的原因所在.

引理 2.4 当 $\beta\geqslant\alpha$ 时,积分型算子 $I_g:LB^\alpha\to LB^\beta$ 有界当且仅当 $g\in H_{\beta-\alpha}^\infty$.

证明 对任意的 $f\in LB^\alpha$,

$$\|I_gf\|_\beta=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\beta\cdot\ln\frac{2}{1-|z|^2}|f'(z)||g(z)|\leqslant\|f\|_{LB^\alpha}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha}|g(z)|.$$

故由 $g\in H_{\beta-\alpha}^\infty$ 可推得 I_g 是有界算子.

反之,对 $\omega\in D$ 且 $\omega\neq0$, 取检验函数

$$f_\omega(z)=\int_0^z\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{|\omega|^2}z^2\right)^{-\alpha}\cdot\left(\ln\frac{4}{1-\frac{\bar{\omega}^2}{|\omega|^2}z^2}\right)^{-1}\mathrm{d}z,$$

由引理 2.2 知 $f_\omega(z)\in LB^\alpha$ 且有

$$f_\omega{}'(\omega)=(1-|\omega|^2)^{-\alpha}\left(\ln\frac{4}{1-|\omega|^2}\right)^{-1}.$$

由 I_g 的有界性知 $\|I_gf_w\|_\beta<\infty$, 即

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\beta\ln\frac{2}{1-|z|^2}|f_\omega{}'(z)||g(z)|<\infty.$$

所以

$$(1-|\omega|^2)^\beta\ln\frac{2}{1-|\omega|^2}|f_\omega{}'(\omega)||g(\omega)|<\infty.$$

从而 $(1-|\omega|^2)^{\beta-\alpha}|g(\omega)|<\infty$. 故 $g\in H_{\beta-\alpha}^\infty$. 证毕.

下面的引理给出从 LB^α 到 LB^β 的算子是紧的等价刻画. 其证明与文献[13]中的命题 3.11 类似,这里省略.

引理 2.5 算子 T: $LB^\alpha\to LB^\beta$ 是紧的当且仅当对 LB^α 上任意有界序列 $\{f_n\}$, f_n 在 D 上内闭一致收敛于 0, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_{LB^\beta}=0.$$

3　C_φ 和 I_g，I_h 的缠绕关系

定理 3.1　$I[\varphi,\psi;g,h]$定义如引言所述．则 $I[\varphi,\psi;g,h]=0$ 当且仅当下列条件同时成立：

(i) $\varphi(0)=0$ 或 $g=0$；

(ii) $\varphi=\psi$；

(iii) $h=g\circ\varphi$.

证明　充分性是显然的，下证必要性.

由 $I[\varphi,\psi;g,h]=0$，对任意的 $f\in LB^\alpha$，有

$$\sup_{f\in LB^\alpha,\ \|f\|\neq 0}\frac{\|(C_\varphi I_g-I_hC_\psi)f\|_{LB^\beta}}{\|f\|_{LB^\alpha}}=0,$$

即

$$\begin{aligned}0=&\|(C_\varphi I_g-I_hC_\psi)f\|_{LB^\beta}=\\&|((C_\varphi I_g-I_hC_\psi)f)(0)|+\\&\|(C_\varphi I_g-I_hC_\psi)f\|_\beta=\\&\left|\int_0^{\varphi(0)}f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\beta\cdot\\&\ln\frac{2}{1-|z|^2}\,|f'(\varphi(z))\varphi'(z)g(\varphi(z))-\\&f'(\psi(z))\psi'(z)h(z)|.\end{aligned}$$

因此,对任意的 $f\in LB^\alpha$ 有

$$\left|\int_0^{\varphi(0)}f'(t)g(t)\mathrm{d}t\right|=0$$

和

$$\begin{aligned}&|f'(\varphi(z))\varphi'(z)g(\varphi(z))-\\&f'(\psi(z))\psi'(z)h(z)|=0,\ \forall z\in D\end{aligned}$$

同时成立. 接下来,与文献[2]中命题 3.1 类似讨论可得(i)，(ii)和(iii)成立．证毕.

由定理 3.1 及 $I[\varphi;g,h]$的定义，易得下面的推论，即 C_φ 缠绕算子 I_g 和 I_h 的充要条件.

推论 3.2　设 $\beta\geqslant\alpha$．若 $g,h\in H^\infty_{\beta-\alpha}$，则 C_φ 缠绕算子 I_g 和 I_h 当且仅当下列条件同时成立：

(i) $\varphi(0)=0$ 或 $g=0$；

(ii) $h=g\circ\varphi$.

下面讨论 C_φ 紧的缠绕算子 I_g 和 I_h 的等价条件，即算子 $I[\varphi;g,h]$的紧性．首先讨论 $I[\varphi;g,h]$的有界性.

定理 3.3　设 $\beta\geqslant\alpha$，则 $I[\varphi;g,h]$是 $LB^\alpha\to LB^\beta$ 的有界算子当且仅当

$$\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\frac{\ln\dfrac{2}{1-|z|^2}}{\ln\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|^2}}|\varphi'(z)|\cdot|(g\circ\varphi-h)(z)|<\infty\tag{1}$$

证明　先证充分性．由(1)式，对任意 $f\in LB^\alpha$，有

$$\begin{aligned}&\|I[\varphi;g,h]f\|_\beta=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\beta\ln\frac{2}{1-|z|^2}\cdot\\&|f'(\varphi(z))||\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|\leqslant\\&\|f\|_\alpha\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\frac{\ln\dfrac{2}{1-|z|^2}}{\ln\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|^2}}\cdot\\&|\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|\leqslant C_1\|f\|_{LB^\alpha}\end{aligned}\tag{2}$$

其中 C_1 为与 f 无关的正常数．由点赋值泛函的有界性知 $I[\varphi;g,h]$有界.

下用反证法证明必要性．假设存在序列$\{z_n\}\subset D$，满足

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{(1-|z_n|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^\alpha}\frac{\ln\dfrac{2}{1-|z_n|^2}}{\ln\dfrac{2}{1-|\varphi(z_n)|^2}}\cdot\\&|\varphi'(z_n)||(g\circ\varphi-h)(z_n)|=\infty\end{aligned}\tag{3}$$

令 $\varphi(z_n)=r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$．取检验函数

$$\begin{aligned}f_n(z)=&\int_0^z\left(\frac{r_n}{1-r_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n}\omega}-\frac{r_n^2}{1-r_n^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n}\omega}\right)^\alpha\cdot\\&\left(\ln\frac{4}{1-r_n^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_n}\omega}\right)^{-1}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

由引理 2.3 知 $f_n(z)\in LB^\alpha$．进而有

$$\begin{aligned}&f_n{}'(\varphi(z_n))=\left(\frac{r_n}{1-r_n^2}-\frac{r_n^2}{1-r_n^3}\right)^\alpha\left(\ln\frac{4}{1-r_n^3}\right)^{-1}=\\&\left(\frac{r_n}{1+r_n+r_n^2}\right)^\alpha\frac{1}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^\alpha}\cdot\\&\left(\ln\frac{4}{1-|\varphi(z_n)|^3}\right)^{-1}\end{aligned}\tag{4}$$

另一方面，对充分大的 n，由(4)式和(3)式有

$$\begin{aligned}&\|I[\varphi;g,h]f_n\|_\beta=\\&\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\beta\ln\frac{2}{1-|z|^2}|f_n{}'(\varphi(z))|\cdot\\&|\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|\geqslant\\&(1-|z_n|^2)^\beta\ln\frac{2}{1-|z_n|^2}|f_n{}'(\varphi(z_n))|\cdot\\&|\varphi'(z_n)||(g\circ\varphi-h)(z_n)|=\\&\left(\frac{r_n}{1+r_n+r_n^2}\right)^\alpha\frac{(1-|z_n|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^\alpha}\cdot\\&\frac{\ln\dfrac{2}{1-|z_n|^2}}{\ln\dfrac{4}{1-|\varphi(z_n)|^3}}|\varphi'(z_n)||(g\circ\varphi-h)(z_n)|\geqslant\\&\left(\frac{r_n}{1+r_n+r_n^2}\right)^\alpha\frac{(1-|z_n|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^\alpha}\cdot\\&\frac{\ln\dfrac{2}{1-|z_n|^2}}{2\ln\dfrac{2}{1-|\varphi(z_n)|^2}}|\varphi'(z_n)|\cdot\end{aligned}$$

$$|(g\circ\varphi-h)(z_n)|\to\infty.$$

这与 $I[\varphi;g,h]$ 有界矛盾. 证毕.

定理 3.4 设 $\beta\geqslant\alpha$. 则 C_φ 紧的缠绕算子 I_g 和 I_h 当且仅当 $I[\varphi;g,h]$ 有界且

$$\lim_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\frac{\ln\frac{2}{1-|z|^2}}{\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}}\cdot|\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|=0 \tag{5}$$

证明 先证充分性. 设 $\{f_n\}$ 为 LB^α 上的有界序列且在 D 上内闭一致收敛于 0. 由引理 2.5 和引理 2.1, 只需验证下式成立:

$$\lim_{n\to\infty}\|I[\varphi;g,h]f_n\|_\beta=0.$$

为方便表述, 假设存在正数 M_1, 使得

$$\sup_{z\in D}\|f_n\|_{LB^\alpha}\leqslant M_1.$$

一方面, 由(5)式, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\sup_{|\varphi(z)|>1-\delta}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\frac{\ln\frac{2}{1-|z|^2}}{\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}}\cdot|\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|<\frac{\varepsilon}{2M_1} \tag{6}$$

且

$$\sup_{|\varphi(z)|>1-\delta}(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}\cdot|f_n{}'(\varphi(z))|\leqslant M_1 \tag{7}$$

另一方面, 由 $\{z\in D:|\varphi(z)|\leqslant1-\delta\}$ 为紧集及 φ,g,h 的解析性, 存在正数 M_2 使得

$$\sup_{|\varphi(z)|\leqslant1-\delta}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\frac{\ln\frac{2}{1-|z|^2}}{\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}}\cdot|\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|<M_2 \tag{8}$$

当 $0<\alpha<1$ 时, 易知

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha\ln\frac{2}{1-|z|^2}<\infty.$$

故存在正常数 M_3, 使得

$$\sup_{|\varphi(z)|\leqslant1-\delta}(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}<M_3 \tag{9}$$

对上述 ε, 由 f_n 在 D 上内闭一致收敛于 0 及 Weierstrass 定理, 当 n 充分大时有

$$\sup_{|\varphi(z)|\leqslant1-\delta}|f_n{}'(\varphi(z))|<\frac{\varepsilon}{2M_2M_3} \tag{10}$$

结合(6)~(10)式得

$$\|I[\varphi;g,h]f_n\|_\beta=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\beta\ln\frac{2}{1-|z|^2}|f_n{}'(\varphi(z))||\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|=$$

$$\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\frac{\ln\frac{2}{1-|z|^2}}{\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}}|\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|\cdot$$

$$(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}|f_n{}'(\varphi(z))|\leqslant$$

$$\max\left\{\sup_{|\varphi(z)|\leqslant1-\delta}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\frac{\ln\frac{2}{1-|z|^2}}{\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}}|\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|\cdot\right.$$

$$(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}|f_n{}'(\varphi(z))|,\sup_{|\varphi(z)|>1-\delta}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}\cdot$$

$$\left.\frac{\ln\frac{2}{1-|z|^2}}{\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}}|\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}|f_n{}'(\varphi(z))|\right\}$$

$$<M_2\cdot M_3\cdot\frac{\varepsilon}{2M_2M_3}+\frac{\varepsilon}{2M_1}\cdot M_1=\varepsilon.$$

故 $I[\varphi;g,h]$ 是紧算子.

下用反证法证明必要性. 假设存在 $\{z_n\}\subset D$, 及 $\varepsilon_0>0$, 满足 $|\varphi(z_n)|\to1(n\to\infty)$ 时有

$$\frac{(1-|z_n|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^\alpha}\frac{\ln\frac{2}{1-|z_n|^2}}{\ln\frac{2}{1-|\varphi(z_n)|^2}}\cdot$$

$$|\varphi'(z_n)||(g\circ\varphi-h)(z_n)|\geqslant\varepsilon_0 \tag{11}$$

令 $\varphi(z_n)=r_n e^{i\theta_n}$. 取检验函数

$$f_n(z)=\int_0^z\left(\frac{r_n}{1-r_n e^{-i\theta_n}\omega}-\frac{r_n^2}{1-r_n^2 e^{-i\theta_n}\omega}\right)^{\alpha}\cdot\left(\ln\frac{4}{1-r_n^2 e^{-i\theta_n}\omega}\right)^{-1}d\omega.$$

由引理 2.3 知$\{f_n\}$是 LB^{α} 上内闭一致收敛于 0 的有界序列. 另一方面，对充分大的 n，有 $r_n\to 1$. 故有$\frac{r_n}{1+r_n+r_n^2}\geqslant\frac{1}{4}$. 再由(4)式和(11)式可得

$$\begin{aligned}
&\|I[\varphi;g,h]f_n\|_{\beta}=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{\beta}\ln\frac{2}{1-|z|^2}\cdot\\
&|f_n'(\varphi(z))||\varphi'(z)||(g\circ\varphi-h)(z)|\geqslant\\
&(1-|z_n|^2)^{\beta}\ln\frac{2}{1-|z_n|^2}|f_n'(\varphi(z_n))|\cdot\\
&|\varphi'(z_n)||(g\circ\varphi-h)(z_n)|=\\
&\left(\frac{r_n}{1+r_n+r_n^2}\right)^{\alpha}\frac{(1-|z_n|^2)^{\beta}}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{\alpha}}\cdot\\
&\frac{\ln\frac{2}{1-|z_n|^2}}{\ln\frac{4}{1-|\varphi(z_n)|^3}}|\varphi'(z_n)||(g\circ\varphi-h)(z_n)|\geqslant\\
&\left(\frac{r_n}{1+r_n+r_n^2}\right)^{\alpha}\frac{(1-|z_n|^2)^{\beta}}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{\alpha}}\cdot\\
&\frac{\ln\frac{2}{1-|z_n|^2}}{2\ln\frac{2}{1-|\varphi(z_n)|^2}}|\varphi'(z_n)||(g\circ\varphi-h)(z_n)|\geqslant\\
&\frac{1}{4^{\alpha}}\frac{\varepsilon_0}{2}.
\end{aligned}$$

这与 $I[\varphi;g,h]$是紧算子矛盾. 证毕.

注　由本文的研究容易想到一个自然的问题，是否可以考虑缠绕算子是积分算子对复合算子的(紧)缠绕关系？也即下面的问题：

问题Ⅰ：I_g 缠绕 C_{φ} 和 C_{ψ} 的条件是什么？

问题Ⅱ：I_g 紧的缠绕 C_{φ} 和 C_{ψ} 的条件是什么？

对前者，由定理 3.1 知，由 $C_{\varphi}I_g=I_gC_{\psi}$ 有 $\varphi=\psi$，也就是说 $\varphi\neq\psi$ 时，I_g 不可能缠绕 C_{φ} 和 C_{ψ}. 由于我们定义的紧的缠绕比缠绕要弱，所以问题Ⅱ仍然有意义，但这种情形比本文研究的情形要复杂，有待进一步研究.

参考文献：

[1] Bourdon P S, Shapiro J H. Intertwining relations and extended eigenvalues for analytic Toeplitz operators [J]. Illionis J Math, 2008, 52: 1007.

[2] Tong C Z, Zhou Z H. Intertwining relations for Volterra operators on the Bergman space [J]. Illionis J Math, 2013, 57: 195.

[3] 叶善力. 解析函数空间的循环元及相关算子理论 [D]. 广东：汕头大学，2009.

[4] 胡小波. 对数 Bergman 型空间到 Bloch 空间上的 Stevic-Sharma 算子 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：25.

[5] 何忠华，邓懿. 单位球上 Bloch-Orlicz 空间上的复合算子 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：237.

[6] Moorhouse J. Compact differences of composition operators [J]. J Funct Anal, 2005, 219: 70.

[7] Hosokawa T, Ohno S. Differences of composition operators on the Bloch spaces [J]. J Operat Theor, 2007, 57: 229.

[8] Fang Z S, Zhou Z H. Differences of composition operators on the Bloch space in the polydisc [J]. B Aust Math Soc, 2009, 79: 465.

[9] Zhou Z H, Liang Y X. Differences of weighted composition operators from Hardy space to weighted-type spaces on the unit ball [J]. Czech Math J, 2012, 62: 695.

[10] Song X J, Zhou Z H. Differences of weighted composition operators from Bloch spaces to H^{∞} spaces on the unit ball [J]. J Math Anal Appl, 2013, 401: 447.

[11] Zhou Z H, Zhang L. Differences of the products of integral type and composition operators from H^{∞} to the Bloch space [J]. Complex Var Elliptic, 2013, 58: 1125.

[12] Zhou Z H, Zhang L, Zeng H G. Essential commutativity of some integral and composition operators [J]. B Aust Math Soc, 2012, 85: 143.

[13] Cowen C C, Maccluer B D. Composition operators on spaces of analytic functions [M]. Boca Raton: CRC Press, 1995.

引用本文格式：

中　文：韩学红，曾红刚. 对数 Bloch 型空间上的积分型算子的缠绕关系 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：595.

英　文：Han X H, Zeng H G. Intertwining relation of integral-type operators on logarithmic Bloch-type spaces [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 595.