2019 年 7 月 四川大学学报(自然科学版) Jul. 2019
第 56 卷 第 4 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 56 No. 4

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.04.007

# 一类非线性二阶离散三点边值问题正解的全局结构

马满堂

(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

**摘 要**：本文研究非线性二阶差分方程三点边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+h(t)f(u(t))=0, t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\ \Delta u(0)=0, u(T)=\lambda u(\eta)\end{cases}$$

正解的全局结构，其中 $\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$，$\Delta^2 u(t)=\Delta(\Delta u(t))=u(t+2)-2u(t+1)+u(t)$，$T\geqslant 4$ 为整数，$\eta\in\{1,2,\cdots,T-1\}$，$\lambda\in[0,1)$为参数，函数 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$且 $f(s)>0$，$s>0$，$h:\{1,2,\cdots,T-1\}\to[0,\infty)$且在$\{1,2,\cdots,T-1\}$的任一非空子集上不恒为零.在非线性项 $f$ 分别满足超线性增长和次线性增长的条件下，本文运用锥上的不动点指数理论及解集的连通性质获得了该问题正解的全局结构.

**关键词**：差分方程；三点边值问题；连通分支；正解

**中图分类号**：O175.7 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2019)04-0621-06

# Global structure of positive solutions for a class of nonlinear second-order discrete three-point boundary value problems

*MA Man-Tang*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract**: In this paper, the global structure of positive solutions for the nonlinear second-order difference equation with three-point boundary value problems

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+h(t)f(u(t))=0, t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\ \Delta u(0)=0, u(T)=\lambda u(\eta)\end{cases}$$

is studied, where $\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$, $\Delta^2 u(t)=\Delta(\Delta u(t))=u(t+2)-2u(t+1)+u(t)$, $T\geqslant 4$ is an integer, $\eta\in\{1,2,\cdots,T-1\}$, $\lambda\in[0,1)$ is a parameter, $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$ satisfies $f(s)>0$ for $s>0$, and $h:\{1,2,\cdots,T-1\}\to[0,\infty)$ is not identically zero on arbitrary nonempty subset of $\{1,2,\cdots,T-1\}$. Applying the fixed point index theory on cone and connectivity properties of the solution set, the global structure of positive solutions is obtained under the conditions that nonlinear term $f$ satisfies the superlinear growth condition and the sublinear growth condition, respectively.

**Keywords**: Difference equation; Three-point boundary value problem; Connected branch; positive solution

(2010 MSC 26A33)

**收稿日期**：2018-10-15

**基金项目**：国家自然科学基金(11671322)

**作者简介**：马满堂(1995-)，男，甘肃张家川人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：mantangma@163.com

# 1 引言

对于二阶常微分方程边值问题，已有许多学者运用锥上的不动点定理、上下解方法和临界点理论等工具研究过[1-6]. 例如，1999年，Ma[1]研究了非线性二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+g(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u(0)=0, u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$, $g\in C([0,1],[0,\infty))$, $0<\alpha\eta<1$. 该文运用锥上的不动点理论获得了如下结论：

**定理A** 若 $f$ 满足下列条件之一：

(i) $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$(超线性)；

(ii) $f_0=\infty$且 $f_\infty=0$(次线性)，

则问题(1)至少存在一个正解，这里

$$f_0=\lim_{s\to 0^+}\frac{f(s)}{s}, f_\infty=\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}.$$

2001年，Weeb[2]研究了非线性二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+g(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u'(0)=0, u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性，其中 $\eta\in(0,1)$, $\alpha\in[0,1)$. 该文首先将问题(2)转化为等价的积分方程

$$u(t)=\int_0^1 K(t,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s := Tu(t), t\in[0,1],$$

这里 $K(t,s)$是问题(2)所对应的 Green 函数,然后在假设条件

(A1) $K:[0,1]\times[0,1]\to[0,\infty)$连续；

(A2) $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$连续；

(A3) $g\in L^1(0,1)$且在$[0,1]$上几乎处处满足 $g\geqslant 0$

成立时运用锥上的不动点指数理论建立了如下结果：

**定理B** 假设 $\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s>0$, $0<\alpha<1$, 且存在 $a,b\in[0,1]$, $a<b$, 若 $f$ 满足下列条件之一：

(i) $0\leqslant f^0<m$ 且 $M<f_\infty\leqslant\infty$；

(ii) $0\leqslant f^\infty<m$ 且 $M<f_0\leqslant\infty$，

则问题(2)至少存在一个正解，其中

$$f^\delta=\limsup_{s\to\delta}\frac{f(s)}{s}, f_\delta=\liminf_{s\to\delta}\frac{f(s)}{s},$$

这里 δ=0 或∞且

$$m=\left(\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 K(t,s)g(s)\mathrm{d}s\right)^{-1},$$

$$M=\left(\min_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b K(t,s)g(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

值得注意的是，文献[1,2]都是在自变量 $t$ 连续的情形下获得相应问题正解的存在性. 近年来，在自变量 $t$ 离散的情形下也获得了一些结果[7-10]. 例如，2010年 He 等[7]研究了非线性二阶差分方程三点边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u(t-1)+f(t,u(t))=0, t\in\{1,2,\cdots,N\}, \\ u(0)=0, u(N+1)=\alpha u(m) \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性，其中 $N\geqslant 2$ 为整数，$m\in\{1,2,\cdots,N\}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $f:\{1,2,\cdots,N\}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续. 他们利用拓扑度理论及不动点指数理论获得了问题(3)正解的存在性结论. 该工作并没有说明随着参数 $\alpha$ 在$[0,1)$内变化解的范数会产生怎样的改变.

本文尝试将问题(2)离散化，运用锥上的不动点指数理论及解集连通性质考察非线性二阶差分方程三点边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u(t-1)+h(t)f(u(t))=0, \\ \quad t\in\{1,2,\cdots,T-1\}, \\ \Delta u(0)=0, u(T)=\lambda u(\eta) \end{cases} \tag{4}$$

正解的全局结构，其中 $\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$, $\Delta^2 u(t)=\Delta(\Delta u(t))=u(t+2)-2u(t+1)+u(t)$, $T\geqslant 4$ 为整数，$\eta\in\{1,2,\cdots,T-1\}$, $\lambda\in[0,1)$为参数，函数 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$且 $f(s)>0$, $s>0$, $h:\{1,2,\cdots,T-1\}\to[0,\infty)$且在$\{1,2,\cdots,T-1\}$的任一非空子集上不恒为零.

设 $Y=\{u:\{1,2,\cdots,T-1\}\to[0,\infty), \Delta u(0)=0\}$,其按范数 $\|u\|_\infty=\max_{t\in\{1,2,\cdots,T-1\}}|u(t)|$ 构成 Banach 空间. $\Sigma$是 $\mathbf{R}\times Y$ 中集合$\{(\lambda,u)\in[0,1)\times Y$: $u$ 是 $u=\Phi(\lambda,u)$的非平凡解$\}$的闭包. 定义锥

$$K:=\{x\in Y: x\geqslant 0, t\in\{1,2,\cdots,T-1\}\}.$$

相应地，令 $K_r=\{x\in K: \|x\|_\infty<r\}$.

本文假定：

(H1) $h:\{1,2,\cdots,T-1\}\to[0,\infty)$且在$\{1,2,\cdots,T-1\}$的任一非空子集上不恒为零；

(H2) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$且 $f(s)>0$, $s>0$；

(H3) $\eta\in\{1,2,\cdots,T-1\}$,并且 $\lambda$ 满足 $0<\lambda<1$.

本文的主要结果如下：

**定理1.1** 假设(H1)~(H3)成立. 若 $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$,则$\Sigma$包含一个连接$\{0\}\times Y$ 与$(1,0)$的连通分支.

**定理1.2** 假设(H1)~(H3)成立. 若 $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$,则$\Sigma$包含一个连接$\{0\}\times Y$ 与$(1,\infty)$的连

通分支.

若$\lambda\neq1$,则问题(4)等价于和分方程

$$u(t)=\sum_{s=1}^{T-1}G(t,s)h(s)f(u(s))+\frac{\lambda}{1-\lambda}\sum_{s=1}^{T-1}G(\eta,s)h(s)f(u(s)):=\Phi(\lambda,u)\tag{5}$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}T-t,1\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\\T-s,0\leqslant t\leqslant s\leqslant T-1.\end{cases}$$

**注 1**　因为$\Phi(\lambda,u)$在$\lambda=1$处没有定义,指数跳跃定理不再适用于(1,0)附近的局部分歧. 因此,我们引用 Leray-Schauder 全局延拓原理来证明我们的结果.

## 2　预备知识

**引理 2.1**[5]　假设$P$是 Banach 空间$E$的一个锥,$V\subset P$是$E$中的有界开集. 若$F:[\mu_1,\mu_2]\times P\to P$是一个连续的紧映射，且满足：

(i) $x=F(\lambda,x)$在$[\mu_1,\mu_2]\times(P\backslash V)$上无解；

(ii) $\mathrm{ind}(F(\mu_1,\cdot),V,P)=m,m\neq0$,

则集合

$$\textstyle\sum^*:=\{(\lambda,x)\in[\mu_1,\mu_2]\times P:x=F(\lambda,x)\}$$

包含一条连接$\{\mu_1\}\times V$和$\{\mu_2\}\times V$的连通分支.

**引理 2.2**　设$\beta\in[0,1)$是一个给定的数. 令$e\in Y$且$e(t)\geqslant0,t\in\{0,1,\cdots,T\}$. 若$u$是问题

$$\begin{cases}\Delta^2u(t-1)+e(t)=0,t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\\Delta u(0)=0,u(T)=\beta u(\eta)\end{cases}$$

的一个解，则$u(t)\geqslant0,t\in\{0,1,\cdots,T\}$，并且，若存在$t_0\in\{0,1,\cdots,T\}$使得$e(t_0)>0$,则$u(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$.

**证明**　由$\Delta^2u(t-1)=-e(t)\leqslant0$可知,$u(t)$在$\{1,2,\cdots,T-1\}$上向上凸. 由$\Delta u(t)=\Delta u(0)-\sum_{s=1}^{T}e(s)$, $\Delta u(0)=0$可得$\Delta u(t)\leqslant0$. 因此$u(t)$在$\{1,2,\cdots,T-1\}$上递减. 只要$u(T)\geqslant0$,对任意的$t\in\{0,1,\cdots,T\}$,就有$u\geqslant0$. 若$u(T)<0$,则有$u(\eta)<0$且$u(T)=\beta u(\eta)>u(\eta)$. 这与$u$的上凸性矛盾. 证毕.

**引理 2.3**　设$0<\lambda<1$. 若$u:\{0,1,\cdots,T\}\to[0,\infty)$且在$\{0,1,\cdots,T\}$上是上凸的,则

$$\min_{t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}}u(t)\geqslant\frac{\lambda(T-\eta)}{T-\lambda\eta}\|u\|_\infty.$$

**证明**　由引理 2.2 可知$u(\eta)>u(T)$, $\|u\|_\infty=u(0)$且$\min_{t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}}u(t)=u(T)$. 则

$$u(0)\leqslant u(T)+\frac{u(T)-u(\eta)}{T-\eta}(0-T)=u(T)\Big(1-T\frac{1-\frac{1}{\lambda}}{T-\eta}\Big),$$

即

$$\min_{t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}}u(t)\geqslant\frac{\lambda(T-\eta)}{T-\lambda\eta}\|u\|_\infty.$$

**引理 2.4**　设$\alpha\in[0,1)$是一个常数,$y\in Y$且满足

$$\begin{cases}\Delta^2y(t-1)\leqslant0,t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\\Delta y(0)=0,y(T)=\alpha y(\eta),\end{cases}$$

且$\|y\|_\infty=1$. 则存在$\tau\in\{1,2,\cdots,T\}$使得$\frac{\alpha-1}{T-\eta}\leqslant\Delta y(\tau)\leqslant0$.

**证明**　由$y(t)$在$\{1,2,\cdots,T-1\}$上向上凸,$\Delta y(t)\leqslant0$及$\Delta y(0)=0$可得,存在$\tau\in\{0,1,\cdots,T\}$使得

$$0\geqslant\Delta y(\tau)\geqslant\Delta y(\eta)\geqslant\frac{y(T)-y(\eta)}{T-\eta}.$$

由于$\|y\|_\infty=1$,因此

$$\frac{y(T)-y(\eta)}{T-\eta}\geqslant\frac{\alpha-1}{T-\eta},$$

即$\frac{\alpha-1}{T-\eta}\leqslant\Delta y(\tau)\leqslant0$.

**引理 2.5**[5]　假设$\bar h:I\to[0,\infty),t\in I\subset\{0,1,\cdots,T\}$,且在$I$的任意非空子集上不恒为零,$\{p_n\}\subset Y$满足$\lim_{n\to\infty}p_n(t)=\infty,t\in I$. 若$\{u_n\}$是$\Delta^2u_n(t-1)+\bar h(t)p_n(t)u_n(t)=0,t\in I$的一个解序列,则当$n$充分大时,$u_n$在$I$上变号.

## 3　超线性情形

为了方便起见,考虑辅助问题

$$\begin{cases}\Delta^2u(t-1)+h(t)f(u(t))=0,t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\\Delta u(0)=0,u(T)=ru(\eta)\end{cases}\tag{4$_r$}$$

对于给定的$r\in[0,1)$,记$\Theta_r=\{(r,u):u\in Y$是问题$(4)_r$的一个非平凡解$\}$. 由条件(H1),(H2)及引理 2.2 有$\Theta_r=\{(r,u):u\in Y$是问题$(4)_r$的一个正解$\}$. 若$a\in[0,1)$,记$\Gamma_a=\{(\lambda,u)\in[0,a]\times Y:u\in Y$是问题(4)的一个非平凡解$\}$. 同样地,由条件(H1),(H2)及引理 2.2 有$\Gamma_a=\{(\lambda,u)\in[0,a]\times Y:u\in Y$是问题(4)的一个正解$\}$. 易见,$\Gamma_a=\bigcup_{r\in[0,a]}\Theta_r$. 我们有如下引理：

**引理 3.1**[5]　假设$f_0=0,f_\infty=\infty$. 则存在正常

数 $b,B,b<B$,使得 $b<\|u\|_\infty<B,\forall u\in\Theta_0$,且

$$\mathrm{ind}(\Phi(0,\cdot),K_B\backslash\bar{K}_b,K)=-1,$$

其中 $\Phi$ 由(5)式所定义,$K_r=\{u\in K:\|u\|_\infty<r\}$.

**引理 3.2** 假设 $f_0=0,f_\infty=\infty,b,B$ 是引理 3.1 中给出的常数. 则对任意的 $a\in(0,1)$,存在一个正数 $\delta_a$ 且 $(\delta_a,\delta_a{}^{-1})\supset[b,B]$,使得

$$\delta_a<\|u\|_\infty<\delta_a{}^{-1},\forall(\lambda,u)\in\Gamma_a.$$

证明 若 $f_0=0$,则存在一个正数 $\delta_1$ 使得 $\|u\|_\infty>\delta_1,\forall(\lambda,u)\in\Gamma_a$. 反设存在序列 $\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\Gamma_a$,当 $\|u_k\|_\infty\to0$ 时有 $\Phi(\lambda_k,u_k)=u_k$. 假设 $\lambda_k\to\bar{\lambda},\bar{\lambda}\in[0,a]$. 由条件(H1),(H1)及引理 2.2 可得 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$. 令 $v_k(t)=\dfrac{u_k(t)}{\|u_k\|_\infty}$. 则

$$\begin{cases}\Delta^2v_k(t-1)+h(t)g_k(t)v_k(t)=0,\\ \quad t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\ \Delta v_k(0)=0,v_k(T)=\lambda_kv_k(\eta)\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$g_k(t)=\begin{cases}\dfrac{f(u_k(t))}{u_k(t)},t\in\{1,2,\cdots,T\},\\ 0,t=0\end{cases}\tag{7}$$

且存在一个不依赖于 $k$ 的常数 $M>0$ 使得 $\|g_k\|_\infty\leqslant M$. 结合(7)式可得

$$\|\Delta^2v_k\|_\infty\leqslant M\|h\|_\infty\tag{8}$$

则由引理 2.4 可得,存在 $\tau_k\in\{1,2,\cdots,T-1\}$ 使得

$$\frac{\alpha-1}{T-\eta}\leqslant\Delta v_k(\tau_k)\leqslant0\tag{9}$$

结合(8),(9)式及 $\Delta v_k(t)=\Delta v_k(\tau_k)+\sum_{s=\tau_k}^{T}\Delta^2v_k(s)$ 可得

$$\|\Delta v_k\|_\infty\leqslant M_1\tag{10}$$

其中 $M_1>0$ 为不依赖于 $k$ 的常数. 由边界条件 $\Delta v_k(0)=0$ 有 $\|v_k\|_\infty\leqslant M_2,M_2>0$ 同样为不依赖于 $k$ 的常数. 根据 Arzela-Ascoli 定理可知,$\{v_k\}$是 $Y$ 中的相对紧集. 故存在一个收敛子列,不妨仍记为$\{v_k\}$,使得 $v_k\to\bar{v}$. 则在$\{1,2,\cdots,T-1\}$上 $\|\bar{v}\|_\infty=1,\bar{v}\geqslant0$.

另一方面,由 $f_0=0$ 及 $\|u\|_\infty\to0,k\to\infty$可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(u_k(t))}{u_k(t)}=0,t\in\{0,1,\cdots,T\}$. 结合(9)式有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|g_k\|_\infty=0$,即

$$|h(t)g_k(t)v_k(t)|\leqslant\|g_k\|_\infty\|h\|_\infty\to0,k\to\infty.$$

代入问题(6)有

$$\begin{cases}\Delta^2\bar{v}(t-1)=0,t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\ \Delta\bar{v}(0)=0,\bar{v}(1)=\bar{\lambda}\bar{v}(\eta)\end{cases}\tag{11}$$

当$\bar{\lambda}\in[0,a]$时,问题(11)只有平凡解,即$\bar{v}(t)=0$. 这与 $\|\bar{v}\|_\infty=1$ 矛盾!

若 $f_\infty=\infty$,则存在一个正数 $\delta_2$ 使得 $\|u\|_\infty<\delta_2,\forall(\lambda,u)\in\Gamma_a$. 反设存在序列$\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\Gamma_a$,当 $\|u_k\|_\infty\to\infty$时,$\Phi(\lambda_k,u_k)=u_k$. 则由条件(H1),(H2)及引理 2.2 可得 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$. 进一步,由引理 2.3 可得

$$\min_{t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}}u(t)\geqslant\frac{\lambda(T-\eta)}{T-\lambda\eta}\|u\|_\infty.$$

又由于 $\|u_k\|_\infty\to\infty$,则$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(t)=\infty,t\in\{1,2,\cdots,T\}$. 令 $v_k(t)=\dfrac{u_k(t)}{\|u_k\|_\infty}$. 考虑方程

$$\Delta^2v_k(t-1)+h(t)g_k(t)v_k(t)=0,$$
$$t\in\{1,2,\cdots,T\}.$$

由引理 2.5 可知,当 $k$ 充分大时,$v_k$ 在$\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}$上变号. 这与 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$矛盾! 取 $\delta_a=\min\{\delta_1,\delta_2^{-1}\}$,引理得证.

定理 1.1 的证明 对任意 $a\in(0,1)$,设 $\delta_a$ 由引理 3.2 给出. 令

$$U_a=\{u\in K:\delta_a<\|u\|_\infty<\delta_a{}^{-1},$$
$$\forall(\lambda,u)\in\Gamma_a\}.$$

则由引理 3.1 和不动点指数定理的切除性可知

$$\mathrm{ind}(\Phi(0,\cdot),U_a,K)=$$
$$\mathrm{ind}(\Phi(0,\cdot),K_B\backslash\bar{K}_b,K)=-1.$$

根据引理 3.2 可得 $u=\Phi(\lambda,u)$在$[0,a]\times(K\backslash U_a)$上无解. 则由引理 2.1 可知存在一条连接 $\Theta_0$ 和 $\Theta_a$ 的连通分支 $\xi^a\subseteq\Gamma_a$. 令 $\Xi:=\{\xi:\xi$ 是$\sum$中的一条连通分支且 $\xi\cap\Theta_0\neq0\}$,则 $\Xi\neq0$.

接下来的证明分三步. 第一步,我们将证明存在 $\xi\in\Xi$ 满足

$$\{\lambda:\exists(\lambda,u)\in\xi\}=[0,1)\tag{12}$$

反设存在$\dot{a}\in(0,1)$使得

$$\sup_{\gamma\in\Xi}\{\sup\{\lambda:\exists(\lambda,u)\in\gamma\}\}=\dot{a}\tag{13}$$

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}(1-\dot{a})$,则$\dot{a}+\varepsilon\in(0,1)$. 设 $\delta_{\dot{a}+\varepsilon}$由引理 3.2 给出. 令

$$U_{\dot{a}+\varepsilon}=\{u\in K:\delta_{\dot{a}+\varepsilon}<\|u\|_\infty<\delta_{\dot{a}+\varepsilon}^{-1}\}.$$

则由引理 3.1 和不动点指数定理的切除性可知

$$\mathrm{ind}(\Phi(0,\cdot),U_{\dot{a}+\varepsilon},K)=-1.$$

根据引理 3.2,$u=\Phi(\lambda,u)$在$[0,\dot{a}+\varepsilon]\times(K\backslash U_{\dot{a}+\varepsilon})$上无解. 则由引理 2.1 可知存在一条连接 $\Theta_0$ 和 $\Theta_{\dot{a}+\varepsilon}$的连通分支 $\xi^{\dot{a}+\varepsilon}\subseteq\Gamma_{\dot{a}+\varepsilon}$. 这与(13)式矛盾!

第二步，若 $\xi$ 是满足(12)式的一条连通分支，则 $\xi$ 与 $(1,\infty)$ 不相交. 反设存在 $\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\xi$，使得当 $\lambda_k\to1$，$\|u_k\|_\infty\to\infty$. 则由条件(H1)，(H2)及引理 2.2 可得 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$. 再由引理 2.3 可得

$$\min_{t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}}u(t)\geqslant\frac{\lambda(T-\eta)}{T-\lambda\eta}\|u\|_\infty.$$

结合 $\|u_k\|_\infty\to\infty$ 可知

$$\lim_{k\to\infty}g_k(t)=\infty,t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\},$$

其中 $g_k$ 如式(7)所示. 令 $v_k=\dfrac{u_k}{\|u_k\|_\infty}$. 考虑方程

$$\Delta^2v_k(t-1)+h(t)g_k(t)v_k(t)=0,t\in\{0,1,\cdots,T\}.$$

则由引理 2.5 可得，当 $k$ 充分大时 $\{v_k\}$ 在 $\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}$ 上变号. 这与 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$ 矛盾！

第三步，同样地，若 $\xi$ 是满足(12)式的一条连通分支，则 $\xi\cap(\{1\}\times Y)=\{(1,0)\}$. 反设 $\xi\cap(\{1\}\times Y)=\{(1,\bar u)\},\bar u\in Y\backslash\{0\}$. 则存在 $\{(\lambda_n,u_n)\}\subset\xi$ 使得 $\lambda_n\to1,u_n\to\bar u$，且

$$\begin{cases}\Delta^2\bar u(t-1)+h(t)f(\bar u)=0,\\ \quad t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\ \Delta\bar u(0)=0,\bar u(T)=\bar u(\eta).\end{cases}$$

根据条件(H1)，(H2)及引理 2.2，不难看出 $\bar u>0$，$t\in\{1,2,\cdots,T\}$，并且 $\bar u$ 在 $\{1,2,\cdots,T\}$ 上凸. 这与 $\bar u(T)=\bar u(\eta)$ 矛盾！证毕.

## 4　次线性情形

**引理 4.1**[5]　假设 $f_0=\infty,f_\infty=0$. 则存在正常数 $b,B$ 且 $b<B$，使得 $b<\|u\|_\infty<B,\forall u\in\Theta_0$，且

$$\mathrm{ind}(\Phi(0,\cdot),K_B\backslash\bar K_b,K)=-1,$$

其中 $\Phi$ 为(5)式所定义，$K_r=\{u\in K:\|u\|_\infty<r\}$.

**引理 4.2**　假设 $f_0=\infty,f_\infty=0,b,B$ 是引理 4.1 中给出的常数. 则对任意的 $a\in(0,1)$，存在一个正数 $\delta_a$ 且 $(\delta_a,\delta_a{}^{-1})\supset[b,B]$，使得

$$\delta_a<\|u\|_\infty<\delta_a{}^{-1},\forall(\lambda,u)\in\Gamma_a.$$

证明　若 $f_0=\infty$，则存在一个正数 $\delta_3$ 使得 $\|u\|_\infty>\delta_3,\forall(\lambda,u)\in\Gamma_a$. 反设存在序列 $\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\Gamma_a$，当 $\|u_k\|_\infty\to0$ 时，有 $\Phi(\lambda_k,u_k)=u_k$. 由条件(H1)，(H1)及引理 2.2 可得 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$. 令 $v_k(t)=\dfrac{v_k(t)}{\|u_k\|_\infty}$. 考虑方程

$$\Delta^2v_k(t-1)+h(t)l_k(t)v_k(t)=0,t\in\{0,1,\cdots,T\},$$

其中 $l_k(t)=\dfrac{f(u_k(t))}{u_k(t)},t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}l_k(t)=\infty,t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}$，则由引理 2.5 可知，当 $k$ 充分大时 $v_k$ 在 $\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}$ 上变号. 这与 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$ 矛盾！

若 $f_\infty=\infty$，则存在一个正数 $\delta_4$ 使得 $\|u\|_\infty<\delta_4,\forall(\lambda,u)\in\Gamma_a$. 定义非减函数 $\tilde f:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$\tilde f=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant r}f(s)$. 由于 $f_\infty=0$，故

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\tilde f(r)}{r}=0\tag{14}$$

反设存在序列 $\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\Gamma_a$，当 $\|u_k\|_\infty\to\infty$ 时，$\Phi(\lambda_k,u_k)=u_k$. 假设 $\lambda_k\to\bar\lambda,\bar\lambda\in[0,a]$. 则由条件(H1)，(H2)及引理 2.2 可得 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$. 令 $\omega_k(t)=\dfrac{u_k(t)}{\|u_k\|_\infty}$ 则

$$\begin{cases}\Delta^2\omega_k(t-1)+h(t)\dfrac{f(u_k(t))}{\|u_k\|_\infty}=0,\\ \quad t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\ \Delta\omega_k(0)=0,\omega_k(T)=\lambda_k\omega_k(\eta)\end{cases}\tag{15}$$

因为

$$\frac{f(u_k(t))}{\|u_k\|_\infty}\leqslant\frac{\tilde f(u_k(t))}{\|u_k\|_\infty}\leqslant\frac{\tilde f(\|u_k\|_\infty)}{\|u_k\|_\infty},$$

由(14)式可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(u_k(t))}{\|u_k\|_\infty}=0,t\in\{0,1,\cdots,T\}$.

又由条件(H1)，存在一个不依赖于 $k$ 的常数 $M_3>0$ 使得 $\|\Delta^2\omega_k\|_\infty\leqslant M_3$. 结合 $\|\omega_k\|_\infty=1$ 及引理 2.4 可得 $\|\Delta\omega_k\|_\infty\leqslant M_4$，其中 $M_4>0$ 为不依赖于 $k$ 的常数. 再由边界条件 $\Delta\omega_k(0)=0$ 有 $\|\omega_k\|_\infty\leqslant M_5,M_5>0$ 同样为不依赖于 $k$ 的常数. 根据 Arzela-Ascoli 定理，$\{\omega_k\}$ 是 $Y$ 中的相对紧集. 故存在一个收敛子列，不妨仍记为 $\{\omega_k\}$，使得 $\omega_k\to\bar\omega$. 则在 $\{1,2,\cdots,T-1\}$ 上 $\|\bar\omega\|_\infty=1,\bar\omega\geqslant0$. 代入问题(15) 有

$$\begin{cases}\Delta^2\bar\omega(t-1)=0,t\in\{1,2,\cdots,T-1\},\\ \Delta\bar\omega(0)=0,\bar\omega(1)=\bar\lambda\bar\omega(\eta)\end{cases}\tag{16}$$

当 $\bar\lambda\in[0,a]$ 时，问题(16)只有平凡解，即 $\bar\omega(t)=0$. 这与 $\|\bar\omega\|_\infty=1$ 矛盾！取 $\delta_a=\min\{\delta_3,\delta_4^{-1}\}$，引理得证.

定理 1.2 的证明　证明方法与定理 1.1 的证明相似，只不过定理 1.1 中 $\mathrm{ind}(\Phi(0,\cdot),U_a,K)=-1$ 而在本定理的证明中 $\mathrm{ind}(\Phi(0,\cdot),U_a,K)=1$. 则根据引理 4.1 及引理 4.2 可得，存在 $\xi\in\Xi$，$\xi$ 满足

$$\{\lambda:\exists(\lambda,u)\in\xi\}=[0,1),\ \xi\cap(\{1\}\times(K\backslash$$

$\{0\}))=0$.

为了完成该定理的证明，我们只需证明 $\xi$ 与$(1,0)$不相交. 反设存在$\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\xi$,使得 $\lambda_k\to 1$, $\|u_k\|_\infty\to\infty$. 则由条件(H1)，(H2)及引理 2.2 可得. $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$,且$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(t)=\infty,t\in\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}$,其中 $g_k(t)$为(7)式所定义. 令 $v_k=\frac{u_k}{\|u_k\|_\infty}$. 则

$$\Delta^2 v_k(t-1)+h(t)g_k(t)v_k(t)=0,t\in\{0,1,\cdots,T\}.$$

则由引理 2.5 可得，当 $k$ 充分大时$\{v_k\}$在$\{\eta,\eta+1,\cdots,T\}$上变号. 这与 $u_k(t)>0,t\in\{1,2,\cdots,T\}$矛盾！证毕.

## 参考文献:

[1] Ma R Y. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary-value problem [J]. Electron J Differ Eq, 1999, 34: 216.

[2] Webb J R L. Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2001, 47: 4319.

[3] 张静，韩晓玲. 二阶三点边值问题对称正解的存在性及多解性 [J]. 四川大学学报：自然科版，2018，55，935.

[4] Wang S L, Liu J S, Coexistence of positive solutions of nonlinear three-point boundary value and its conjugate problem [J]. J Math Anal Appl, 2007, 330: 334.

[5] Ma R Y, Thompson B. Global behavior of positive solutions of nonlinear three-point boundary value problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2005, 60: 685.

[6] 魏丽萍. 一类非线性二阶三点边值问题正解的全局结构 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：440.

[7] He T S, Yang W, Yang F J. Sign-changing solutions for discrete second-order three-point boundary value problems [J]. Discrete Dyn Nat Soc, 2010, 39: 1.

[8] Ma R Y, Ma H L. Positive solutions for nonlinear discrete periodic boundary value problems [J]. Comput Math Appl, 2010, 59: 136.

[9] Bai D Y, Henderson J, Zeng Y X. Positive solutions of discrete Neumann boundary value problems with sign-changing nonlinearities [J]. Bound Value Probl, 2015, 2015: 1.

[10] Cao C H. On the linear and nonlinear discrete second-order Neumann boundary value problems [J]. Appl Math Comput, 2014, 233: 62.

**引用本文格式:**

中　文：马满堂. 一类非线性二阶离散三点边值问题正解的全局结构 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：621.

英　文：Ma M T. Global Structure of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Second-Order Discrete Three-Point Boundary Value Problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 621.