doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.01.006

全空间中具时间依赖参数的 p-Laplacian 方程的拉回吸引子

王　怡，马巧珍
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文考虑无界域上 p-laplacian 方程 $u_t-\mathrm{div}(\varepsilon(t)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(x,u)=g(x,t)$ 的长时动力学行为. 在外力项满足积分条件下,本文利用尾部估计方法证明了方程对应的过程是渐近紧的,从而得到其拉回吸引子的存在性.

关键词：无界域；p-Laplacian 方程；拉回吸引子
中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)01-0043-06

Pullback attractor of p-Laplacian equation with time-dependent parameters on the entire space

WANG Yi, *MA Qiao-Zhen*
(College of Mathematics and Statistics, Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Long time dynamical behavior of the p-laplacian equation $u_t-\mathrm{div}(\varepsilon(t)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(x,u)=g(x,t)$ is considered. We prove that the process associated with the equation is asymptotically compact under the Condition that the forcing term satisfies certain integral condition. By using the tail estimates of solution, the existence of pullback attractor is proved as well.

Keywords: Unbounded domain; p-Laplacian equation; Pullback attractor
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

文献[1]考虑了单项渗透问题. 假设有一种可压缩流体在均匀、各向同性的刚性多孔介质中流动. 根据质量守恒定律有

$$\theta\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{div}(u\vec{v})=0 \tag{1}$$

其中正常数 θ 为介质的孔隙率,u 为流体的渗透速度. 在非牛顿多方气体流中,上式中的气体动量密度

$$u\vec{v}=-\lambda\,|\nabla P|^{\alpha-1}\nabla P \tag{2}$$

而压力和密度满足状态方程

$$P=cu^{\gamma} \tag{3}$$

其中 λ 与视粘度 μ 有关,μ 不仅取决于切变率而且取决于施加切变率的时间，$\alpha>0$ 是物理常数，c 和 γ 是正常数. 结合以上方程,我们可以得到

$$u_t-\mathrm{div}(\varepsilon(t)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(x,u)=g(x) \tag{4}$$

在带参变量 t 的赋范空间中时间依赖全局吸引子和拉回吸引子的存在性.

本文考虑外力项也依赖于时间 t 的 p-Laplacian 方程

收稿日期：2018-11-19
基金项目：国家自然科学基金(11561064,11961059)
作者简介：王怡(1992－)，女，硕士，主要研究方向为无穷维动力系统. E-mail：2277023373@qq.com
通讯作者：马巧珍. E-mail：maqzh@nwnu.edu.cn

$$\begin{cases} u_t - \mathrm{div}(\varepsilon(t)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u) = \\ \qquad g(x,t),(x,t)\in \mathbf{R}^n\times(\tau,\infty), \\ u(x,\tau)=u_\tau(x),\ x\in \mathbf{R} \end{cases} \tag{5}$$

其中 $p>2$, $f(x,u)=a(x)f_1(u)$满足假设:

$$f_1(0)=0, \alpha|u|^p-\beta|u|^2\leqslant f_1(u)u\leqslant \gamma|u|^p+\delta|u|^2 \tag{6}$$

$$f_1{}'(u)\geqslant c_1 \tag{7}$$

$$a(\cdot)\in L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^\infty(\mathbf{R}^n), a(x)>0, \forall x\in \mathbf{R}^n, \tag{8}$$

这里 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为正常数, $\alpha>\beta$ 与文献[2-3]相同.

设 $\varepsilon(\cdot)\in C^1(\mathbf{R})$是单调递减函数并满足

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=0 \tag{9}$$

且存在 $L>0$,使得

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}[|\varepsilon(\mathrm{t})|+|\varepsilon'(t)|]\leqslant L \tag{10}$$

外力项 $\boldsymbol{g}\in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n))$,且满足

$$\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\sigma s}\int_{\mathbf{R}^n}|g(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s<+\infty, \forall t\in \mathbf{R} \tag{11}$$

其中 $\sigma>0$ 为恰当的常数. 当 $\varepsilon(t)$为常数时,方程(5)的全局吸引子和一致吸引子的存在性已有研究[4-6]. 文献[7]研究了参数为 D_λ 的 p-Laplacian 方程拉回吸引子的存在性和上半连续性,其中 $D_\lambda(t)\in L^\infty([\tau,t]\times\Omega)$,在$[\tau,t]\times\Omega$ 上, $0<\beta\leqslant D_\lambda(t,x)\leqslant M$ 几乎处处成立. 对每个 $\lambda\in[0,\infty]$, $\forall x\in\Omega, s,t\in[\tau,T]$,有

$$|D_\lambda(sx)-D_\lambda(tx)|\leqslant C_\lambda|s-t|^{\theta\lambda},$$

且在 $L^\infty([\tau,t]\times\Omega)$上当 $\lambda\to\lambda_1$ 时, $D_\lambda\to D_{\lambda_1}$. 最近,文献[8-9]分别得到了 plate 方程强拉回吸引子的存在性和带有非线性阻尼的非线性弹性杆振动方程时间依赖吸引子的存在性.

在无界域上研究 p-Laplacian 方程所对应的无穷维动力系统吸引子的存在性时,Sobolev 嵌入没有紧性是一个本质的困难. 为克服这一困难,我们利用了文献[10]中提出的尾部估计方法. 本研究是文献[11]的推广.

2 预备知识

设 X 是完备的距离空间. 对 $t\in\mathbf{R}$,令 X_t 是一族依赖于时间的赋范空间. 称双参数算子族$\{U(\mathrm{t},\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是一过程,若它满足

(i) $U(t,\tau)=U(t,r)U(r,\tau), \forall t\geqslant r\geqslant\tau$;

(ii) $U(\tau,\tau)$是 X_τ 上的恒同映射, $\forall\tau\in\mathbf{R}$;

(iii) $U(t,\tau):X\to X$ 连续, $t\geqslant\tau\geqslant\mathbf{R}$.

设 $\tilde{D}$ 是由参数集 $\hat{D}=\{D(t):t\in\mathbf{R}\}\subset P(X)$构成的非空集合,其中 $P(X)$表示 X 的所有非空子集构成的集合. 为描述时间依赖赋范空间中拉回吸引子的存在性,我们给出下面一些概念和抽象结论.

定义 2.1 称有界的一族集合 $\hat{B}\coloneqq\{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$是拉回 $\tilde{D}$-吸收集,如果对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 以及 $\hat{D}\subset\tilde{D}$,存在 $\tau_0(t,\hat{D})$使得 $U(t,\tau)D(\tau)\subset B_t, \forall\tau\leqslant\tau_0(t,\hat{D})$.

定义 2.2 给定 $t\in\mathbf{R}$. 称一个集合 $K\subset X$ 关于过程$\{U(\mathrm{t},\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在 t 时刻拉回吸引一个集合 D,如果满足 $\lim\limits_{s\to-\infty}\mathrm{dist}(U(t,s)D,K)=0$.

如果对每一个有界集 $D\subset X$ 上式都成立,则称 K 在 t 时刻拉回吸引有界集.

定义 2.3[12] 集族 $\hat{A}=\{A(t):A(t)\in P(X),t\in\mathbf{R}\}$称为过程$\{U(\mathrm{t},\tau)\}_{t\geqslant\tau}$的拉回 $\tilde{D}$-吸引子,如果

(i) 对于任意 $t\in R$, $A(t)$是 X 中的紧集;

(ii) 对过程 $U(t,\tau)$而言, $A(t)$具有不变性,即

$$U(t,\tau)A(\tau)=A(t), \forall -\infty<\tau\leqslant t<+\infty,$$

$A(t)$拉回吸引空间 X 中任意有界集 D,即对任意的 $t\in R$,有

$$\lim_{\tau\to-\infty}\mathrm{dist}(U(t,s)D(\tau),A(t))=0,$$

其中 $\mathrm{dist}(A,B)$表示集合 A 和 B 的 Hausdorff 半距离.

下面的定理保证了拉回 $\tilde{D}$-吸引子的唯一性.

定理 2.4[13] 若过程 $U(\cdot,\cdot)$是拉回 $\tilde{D}$-渐近紧的, $\hat{B}\in\tilde{D}$ 是 $U(\cdot,\cdot)$的拉回 $\tilde{D}$-吸收集,则如下定义的 $\hat{A}=\{A(t):t\in\mathbf{R},A(t)=\Lambda(\hat{B},t)\}$是过程 $U(\cdot,\cdot)$的拉回 $\tilde{D}$-吸引子,其中对每个 $\hat{D}\in\tilde{D}, t\in\mathbf{R}$ 有 $\Lambda(\hat{D},t):=\bigcap\limits_{s\leqslant t}\overline{\bigcup\limits_{\tau\leqslant s}U(t,\tau)D(\tau)}$.

另外,对 $t\in\mathbf{R}$,称 A 是最小的,如 $\hat{C}=\{C(t):t\in\mathbf{R}\}\subset P(X)$是闭集,满足

$$\lim_{\tau\to-\infty}\mathrm{dist}(U(t,s)D(\tau),A(t))=0,$$

则 $A(t)\subset C(t)$.

定理 2.5[13] 假设过程 $U(t,\tau)$存在(X,X)-拉回吸收集 $\hat{B}:=\{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$且是$(X,X)$-拉回渐近紧的. 则存在紧集族是 $U(t,\tau)$的(X,X)-拉回吸引子,其中 $A(t)=\bigcap\limits_{s\leqslant t}\overline{\bigcup\limits_{\tau\leqslant s}U(t,\tau)B(\tau)}^X$ 表示集合 A 在空间 X 中的闭包.

3 主要结果

令含参变量空间 $X_t:=L^2(\mathbf{R}^n)$, $Y_t:=W_0^{1,p}$,

$p>1$，其范数分别为

$$\|u\|_{X_t}^2=\varepsilon(t)\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2,$$

$$\|u\|_{Y_t}^p=\varepsilon^2(t)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^p.$$

记 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中的内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，范数为 $\|\cdot\|$. 由 $\varepsilon(t)$ 的假设可知，对固定的 $t,\tau\in\mathbf{R}$，空间 X_t 与 X_τ，Y_t 与 Y_τ 的范数等价，且当 $t\to+\infty$ 时，等价常数爆破，见文献[12]. 由标准的 Galerkin 方法，以下定理成立.

定理 3.1　假设 f,ε,g 满足(6)～(11)式. 则对任意的 $\tau\in\mathbf{R}$，初值 $u_\tau\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 和任意的 $t\geqslant\tau$，方程(5)存在唯一解 $u\in C([\tau,t];L^2(\mathbf{R}^n))$，且映射 $u_\tau\to u(t,\tau,u_\tau)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中连续.

由上面的定理可知，在 X_t 中可以定义连续过程

$$U(t,\tau):U(t,\tau)u(\tau)=u(t)\tag{12}$$

其中 $u(t)$ 是问题(5)的解. 现在给出本文的主要结果：

定理 3.2　假设 f,ε,g 满足(6)～(11)式. 则由(12)式定义的过程 $U(t,\tau)$ 在 X_t 上存在时间依赖拉回吸引子 $\hat{A}=\{A(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$，$A(t)$ 在 Y_t 中有界，且在 $U(t,\tau)$ 之下具有不变性.

为了证明定理 3.2，首先证明下面几个引理.

引理 3.3　假设 f，ε，g 满足(6)～(11)式，则有

$$\|u\|_{X_t}^2\leqslant\|u\|_{X_{\tau t}}^2 e^{-Q(t-\tau)}+R_t,$$

其中 Q 是不依赖与 t,τ 的正常数，

$$R_t=C_\nu L e^{-Qt}\int_{-\infty}^{t}e^{Qs}\ \|g(s)\|^2 ds+2C_1.$$

证明　证明过程类似于文献[3]中的证明，只是外力项的估计不同. 用 $\varepsilon(t)u$ 与(5)式在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中做内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon(t)\|u\|^2)-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\|u\|^2+\varepsilon^2(t)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^p+\langle f(x,u),\varepsilon(t)u\rangle=\langle g(x,t),\varepsilon(t)u\rangle\tag{13}$$

由于 $f(x,u)=a(x)f_1(u)$，应用(6)式可得

$$\alpha\int_{\mathbf{R}^n}a(x)\ |u|^p dx-\beta\int_{\mathbf{R}^n}a(x)|u|^2 dx\leqslant\langle a(x)f_1(u),u\rangle\leqslant\gamma\ \|a\|_{L^\infty}\ \|u\|_{L^p}^p+\delta\ \|a\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\ \|u\|^2\tag{14}$$

由 g 的假设及 Cauchy 不等式，有

$$2\langle g(x,t),\varepsilon(t)u\rangle\leqslant\frac{1}{\nu}\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}|g(x,t)|^2 dx+\nu\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}|u|^2 dx\tag{15}$$

其中 ν 为充分小的正常数. 由(13)～(15)式并结合 $\varepsilon'(t)<0$ 得

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon(t)\|u\|^2)+2\varepsilon^2(t)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^p+2\alpha\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}a(x)\ |u|^p dx-2\beta\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}a(x)\ |u|^2 dx\leqslant C_\nu L\int_{\mathbf{R}^n}|g(x,t)|^2 dx+\nu\varepsilon(t)\|u\|^2\tag{16}$$

注意 $p>2$，故

$$\|u\|^2+C\ \|u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^2\leqslant C\ \|u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^p\tag{17}$$

由于 $a(x)>0$，故存在正常数 α_0，使得 $a(x)\geqslant\alpha_0>0$，$\forall x\in\mathbf{R}^n$. 由(17)式和 $a(x)$ 的假设及嵌入定理得到

$$2\alpha\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}a(x)\ |u|^p dx-2\beta\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}a(x)\ |u|^2 dx-\nu\varepsilon(t)\ \|u\|^2\geqslant Q\varepsilon(t)\ \|u\|^2\tag{18}$$

这里 Q 为不依赖于 t,x 的正常数. 将(18)式代入(16)式可得

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon(t)\ \|u\|^2)+Q\varepsilon(t)\ \|u\|^2\leqslant C_\nu L\int_{\mathbf{R}^n}\|g(t)\|^2 dx\tag{19}$$

上式两端同乘 e^{Qs} 有

$$\frac{d}{ds}e^{Qs}(\varepsilon(s)\ \|u\|^2)\leqslant e^{Qs}C_\nu L\int_{\mathbf{R}^n}\|g(s)\|^2 dx\tag{20}$$

对(20)式关于 s 在 $[\tau,t]$ 上积分得

$$\varepsilon(t)\ \|u(t)\|^2\leqslant e^{-Q(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\ \|u(\tau)\|^2+C_\nu L e^{-Qt}\int_{-\infty}^{t}e^{Qs}\ \|g(s)\|^2 ds+2C_1\tag{21}$$

这里 C_1 是不依赖于 t,x 的正常数. 结合(11)式得到 $R_t<\infty$，且 $\|u\|_{X_t}^2\leqslant R_t$. 这样，由引理 3.3 可知，(12)式定义的过程 $U(t,\tau)$ 拥有一个有界的拉回吸收集 $\{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$，其中 $B_t=\{u\in X_t,\ \|u\|_{X_t}^2\leqslant R_t\}$.

注 1　引理 3.1 的证明过程结合(16)式可得

$$\int_\tau^t\varepsilon^2(s)\ \|\nabla u(s)\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^p ds\leqslant R_t\tag{22}$$

引理 3.4　假设 f,ε,g 满足(16)～(11)式. 则当初值 $u_\tau\in B_\tau$ 时，存在 $\tau_0=\tau_0(Q)>0$，使得方程(5)的解满足 $\|u\|_{Y_t}^p\leqslant M_t$，$\forall t\geqslant\tau+\tau_0$，其中 Q 是不依赖于 t，τ 的正常数，

$$M_t=\frac{c_1^2\ \|a\|_{L^\infty}^2 P}{Q}\mathrm{e}^{-Q(t-\tau)}\int_\tau^t R_s\mathrm{d}s+$$
$$PL\mathrm{e}^{-Q\tau}\ \|g(s)\|^2\mathrm{d}s.$$

证明 用 $\varepsilon(t)u_t$ 与(9)式在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中做内积可得

$$\varepsilon(t)\|u_t\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{p}\varepsilon^2(t)\|\nabla u\|_p^p\Big)-\frac{2}{p}\varepsilon'(t)\varepsilon(t)\|\nabla u\|_p^p=-\langle f(x,u),\varepsilon(t)u_t\rangle+\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)g(x,t)u_t\mathrm{d}x \quad (23)$$

由(7)式及 Hölder 不等式得

$$-\langle f(x,u),\varepsilon(t)u_t\rangle\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}c_1|u||\varepsilon(t)u_t|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon(t)}{2}\ \|u_t\|^2+\frac{c_1^2\ \|a\|_{L^\infty}^2}{2}\varepsilon(t)\ \|u\|^2.$$

将上式代入(23)式得

$$\varepsilon(t)\ \|u_t\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{p}\varepsilon^2(t)\ \|\ \nabla u\|_p^p\Big)\leqslant\frac{\varepsilon(t)}{2}\ \|u_t\|^2+c_1^2\ \|a\|_{L^\infty}^2R_t+\frac{\varepsilon(t)}{2}\ \|u_t\|^2+\varepsilon(t)\ \|g(t)\|^2 \quad (24)$$

上式两端同乘 e^{Qs},结合 $\varepsilon'(t)<0$ 和(22)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\mathrm{e}^{Qs}\frac{1}{p}\varepsilon^2(s)\ \|\nabla u(s)\ \|_p^p\Big)\leqslant Q\mathrm{e}^{Qs}\Big(\frac{1}{p}\varepsilon^2(s)\ \|\nabla u(s)\ \|_p^p\Big)+\mathrm{e}^{Qs}c_1^2\ \|a\|_{L^\infty}^2R_s+\mathrm{e}^{Qs}\varepsilon(s)\|g(s)\|^2 \quad (25)$$

由一致 Gronwall 引理得

$$\mathrm{e}^{Qt}\frac{1}{p}\varepsilon^2(t)\|\nabla u(t)\ \|_p^p\leqslant\mathrm{e}^{Q\tau}\mathrm{e}^{Q(t-\tau)}\frac{1}{p}\varepsilon^2(\tau)\|\nabla u(\tau)\|_p^p+\mathrm{e}^{Q(t-\tau)}\int_\tau^t\mathrm{e}^{Qs}c_1^2\ \|a\|_{L^\infty}^2R_s\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{Q(t-\tau)}\int_\tau^t\mathrm{e}^{Qs}\varepsilon(s)\ \|g(s)\|^2\mathrm{d}s \quad (26)$$

即

$$\frac{1}{p}\varepsilon^2(t)\|\nabla u(t)\|_p^p\leqslant\frac{1}{p}\varepsilon^2(\tau)\|\nabla u(\tau)\|_p^p+\mathrm{e}^{-Q\tau}\int_\tau^t\mathrm{e}^{Qs}c_1^2\ \|a\|_{L^\infty}^2R_s\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{-Q\tau}\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{Qs}\varepsilon(s)\|g(s)\|^2ds \quad (27)$$

从而由(10)式可得

$$\varepsilon^2(t)\|\nabla u(t)\|_p^p\leqslant\varepsilon^2(\tau)\|\nabla u(\tau)\|_p^p+\frac{c_1^2\ \|a\|_{L^\infty}^2P}{Q}\mathrm{e}^{-Q(t-\tau)}\int_\tau^t R_s\mathrm{d}s+PL\mathrm{e}^{-Q\tau}\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{Qs}\varepsilon(s)\ \|g(s)\|^2\mathrm{d}s \quad (28)$$

结合(11)式和引理 3.3 得到

$$\varepsilon^2(t)\|\nabla u\|_p^p\leqslant M_t \quad (29)$$

证毕.

引理 3.5 对任意的 $\sigma>0$,当初值 $u_\tau\in B_\tau$ 时存在正常数 k 和 $T>0$,使得

$$\int_{|x|\geqslant k}\varepsilon(t)\ |u(t)|^2\mathrm{d}x<\sigma,\forall t\geqslant\tau+T \quad (30)$$

证明 选择合适的光滑函数 θ,使得对任意的 $s\geqslant0$ 有 $0\leqslant\theta(s)\leqslant1$. 具体地,当 $0\leqslant\theta(s)\leqslant1$ 时有 $\theta(s)=0$;当 $s\geqslant2$ 时有 $\theta(s)=1$,且存在一正常数 C,使得 $|\theta'(s)|\leqslant C$.

在方程(5)两端用 $\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\varepsilon(t)u$ 于 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中做内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|u|^2\mathrm{d}x+\langle-\mathrm{div}(\varepsilon(t)|\nabla u|^{p-2}\nabla u),\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\varepsilon(t)u\rangle+\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)f(x,u)u\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)g(x,t)u\mathrm{d}x \quad (31)$$

应用 $\varepsilon(t)$ 单调递减的假设及 Cauchy 不等式,忽略(31)式左边第二项可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|u|^2\mathrm{d}x+\langle-\mathrm{div}(\varepsilon(t)\ |\nabla u|^{p-2}\nabla u),\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\varepsilon(t)u\rangle+\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)f(x,u)u\mathrm{d}x\leqslant\frac{\nu}{2}\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2\nu}\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|g(x,t)|^2\mathrm{d}x \quad (32)$$

注意到

$$\langle-\mathrm{div}(\varepsilon(t)|\nabla u|^{p-2}\nabla u),\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\varepsilon(t)u\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon^2(t)\theta^2\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|\nabla u|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon^2(t)\theta'\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\theta\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|\nabla u|^{p-2}u\nabla u\frac{4x}{k^2}\mathrm{d}x \quad (33)$$

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon^2(t)\theta'\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)\theta\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)|\nabla u|^{p-2}u\nabla u\frac{4x}{k^2}\mathrm{d}x\Big|\leqslant$$

$$\frac{C}{k}\int_{k\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}k}\varepsilon^2(t)\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|\nabla u|^{p-1}|u|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{C}{k}\varepsilon^2(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^p\mathrm{d}x+$$
$$\frac{\varepsilon^2(t)}{k}\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|\nabla u|^p\mathrm{d}x \tag{34}$$

由(6)式得

$$\alpha\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)a(x)\varepsilon(t)|u|^{\mathrm{p}}\mathrm{d}x-$$
$$\beta\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)a(x)\varepsilon(t)|u|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)f(x,u)u\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\gamma\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|\mathrm{x}|^2}{k^2}\right)a(x)\varepsilon(t)|u|^p\mathrm{d}x+$$
$$\delta\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)a(x)\varepsilon(t)|u|^2\mathrm{d}x \tag{35}$$

将(33)～(35)式代入(32)式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^2\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon^2(t)\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|\nabla u|^p\mathrm{d}x-$$
$$\frac{C}{k}\varepsilon^2(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^p\mathrm{d}x-$$
$$\frac{\varepsilon^2(t)}{k}\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|\nabla u|^p\mathrm{d}x+$$
$$\alpha\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)a(x)\varepsilon(t)|u|^p\mathrm{d}x-$$
$$\beta\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)a(x)\varepsilon(t)|u|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{v}{2}\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u^2|\mathrm{d}x+$$
$$\frac{1}{2v}\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|g(x,t)|^2\mathrm{d}x \tag{36}$$

注意到 $p>2$，故

$$\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^p\mathrm{d}x \tag{37}$$

这里 C 是不依赖于 t,u 的常数. 由(37)式和 $a(x)$ 的假设可知存在正常数 λ 和 k_0 使得当 $k>k_0$ 时有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon^2(t)\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|\nabla u|^{\mathrm{p}}\mathrm{d}x-$$
$$\frac{C}{k}\varepsilon^2(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^{\mathrm{p}}\mathrm{d}x-$$
$$\frac{\varepsilon^2(t)}{k}\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|\nabla u|^{\mathrm{p}}\mathrm{d}x+$$
$$\alpha\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)a(x)\varepsilon(t)|u|^{\mathrm{p}}\mathrm{d}x-$$
$$\beta\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)a(x)\varepsilon(t)|u|^2\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|\mathrm{x}|^2}{k^2}\right)\varepsilon(t)|u|^2\mathrm{d}x \tag{38}$$

将(38)式代入到(36)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varepsilon(t)|u|^2\mathrm{d}x+$$
$$(\lambda-\nu)\varepsilon(t)\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varepsilon(t)|g(x,t)|^2\mathrm{d}x \tag{39}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\mathrm{e}^{\nu r}\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varepsilon(t)|u|^2\mathrm{d}x\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{\nu}\mathrm{e}^{\nu r}\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varepsilon(t)|g(\cdot,r)|^2\mathrm{d}x \tag{40}$$

上式两边关于 r 在 $[\tau,t]$ 上积分可得

$$\int_{\mathbf{R}^n}\theta^2\left(\frac{|\mathrm{x}|^2}{k^2}\right)\varepsilon(t)|u(t)|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{-\nu t}\mathrm{e}^{\nu\tau}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\varepsilon(\tau)|u(\tau)|_2^2+$$
$$\frac{\mathrm{L}}{\nu}\mathrm{e}^{-\nu t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\nu r}\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\|g(\cdot,r)\|_2^2\,\mathrm{d}r \tag{41}$$

下面我们对(41)式的右边两项进行估计. 由于 $u_\tau\in B_\tau$，则当 $\tau\to-\infty$ 时，对任意固定的 $t\in\mathbf{R}$ 有

$$\mathrm{e}^{-\nu t}\mathrm{e}^{\nu\tau}\|u_\tau\|_2^2\varepsilon(\tau)\to 0 \tag{42}$$

由 Lebesgue 积分的性质，存在 $k_1(t,\sigma)$ 使得第二项满足

$$\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{\nu r}\int_{|x|\geqslant k}|g(x,r)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}r<\sigma, k\geqslant k_1 \tag{43}$$

注意到

$$\int_{|x|\geqslant\sqrt{2}k}\varepsilon(t)|u(t)|^2\mathrm{d}x=$$
$$\int_{|x|\geqslant\sqrt{2}k}\varepsilon(t)\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u(t)|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon(t)\theta^2\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x \tag{44}$$

则存在 $k_2>k$ 使得

$$\int_{|x|\geqslant\sqrt{2}k}\varepsilon(t)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x<\sigma \tag{45}$$

定理 3.2 的证明　由引理 3.3 可知 $u(t,\tau)$ 于 X_t 上存在有界的拉回吸收集 $\{B_t\}_{t\in\mathbf{R}}$. 由引理 3.4 和引理 3.5 可知 $u(t,\tau)$ 在 X_t 上是渐进紧的. 应用定理 2.5 和定理 3.1，定理 3.2 得证.

参考文献：

[1]　Bean J. 多孔介质流体动力学[M]. 李竞生，陈崇希，

译. 北京：中国建筑工业出版社，1983.
[2] 周萍，李晓军. p-laplacian方程在依赖时间赋范空间中全局吸引子的存在性[J]. 中北大学自然科学学报，2016，37：6.
[3] 周萍，李晓军. 无界域p-laplacian方程在依赖参数的空间动力学行为[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2016，2：181.
[4] Conti M，Pata V，Temam R. Attractors for processes on time-dependent spaces，applications to wave equation [J]. J Differ Equations，2013，255：1254.
[5] Conti M，Pata V. Asymptotic structure of the attractor for processes on time-dependent spaces [J]. Nonlinear Anal-RWA，2014，19：1.
[6] Yang M H，Sun C Y，Zhong C K. Existence of a global attractor for a P-Laplacian equation in $\mathbf{R}^n$[J]. Nonlinear Anal-Theor，2007，66：1.
[7] Yang M H，Sun C Y，Zhong C K. Global attractors for p-Laplacian equation [J]. J Math Anal Appl，2007，327：1130.
[8] Chen G X，Zhong C K. Uniform attractors for non-autonomous p-laplacian equations [J]. Nonlinear Anal-Theor，2008，68：3349.
[9] Simsen J，Nascimento M J D，Simsen M S. Existence and upper semicontinuity of pullback attractors for non-autonomous p-Laplacian parabolic problems [J]. J Math Anal Appl，2014，413：685.
[10] 刘亭亭，马巧珍. 非自治Plate方程时间依赖强拉回吸引子的存在性 [J]. 数学年刊A辑：中文版，2017，2：125.
[11] 刘亭亭，马巧珍. 带有非线性阻尼的非线性发展方程的时间依赖吸引子 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：917.
[12] Wang B X. Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains [J]. Physica D，1999，128：41.
[13] Caraballo T，Lukaszewicz G，Real J. Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems [J]. Nonlinear Anal：Theor，2006，64：484.

引用本文格式：
中　文：王怡，马巧珍. 全空间中具时间依赖参数的P-Laplacian方程的拉回吸引子[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：43.
英　文：Wang Y，Ma Q Z. Pullback attractor of p-laplacian equation with time-dependent parameters on the entire space [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2020，57：43.