doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.06.003

一类非线性四阶常微分方程边值问题正解的存在性

张亚莉
（西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070）

摘　要：本文研究了一类非线性四阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda f(t,u(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=u'''(1)=0, \\ u'(1)+C(u(1))u(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性，其中 λ 是一个正参数，$f:[0,1]\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ 满足 L^1 -Caratheodory 条件，C：$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续. 主要结果的证明基于锥拉伸与压缩不动点定理.

关键词：四阶常微分方程；锥；正解；存在性
中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2019)06-1004-05

Existence of positive solutions for a class of nonlinear fourth-order ordinary differential equations with boundary values

ZHANG Ya-Li
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of positive solutions for a class of nonlinear fourth-order ordinary differential equations with boundary values:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda f(t,u(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=u'''(1)=0, \\ u'(1)+C(u(1))u(1)=0, \end{cases}$$

where λ is a positive parameter, $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ satisfies L^1 -Caratheodory conditions, C: $[0,\infty)\to[0,\infty)$ is continuous. The proof of the main results is based on the fixed-point theorem of cone expansion-compression.

Keywords: Fourth-order ordinary differential equation; Cone; Positive solution; Existence
(2010 MSC 26A33)

1 引　言

常微分方程边值问题的可解性是一个研究热点，已有许多重要结果[1-8]. 特别地，Ma 和 Wang[1] 运用锥拉伸与压缩不动点定理证明了四阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)-h(t)f(u(t))=0,t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，h：$[0,1]\to[0,\infty)$ 连续. Graef 等[2] 运用锥拉伸与压缩不动点定理证明了四阶边值问题

收稿日期：2018-12-24
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：张亚莉(1995－)，女，甘肃平凉人，硕士生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：1364946931@qq.com

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda h(t)f(u(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=u'(1)=u''(0)=u'''(1)=0 \end{cases} \quad (2)$$

正解的存在性，其中 λ 是一个正参数，$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，$h:[0,1]\to[0,\infty)$ 连续.

值得注意的是，文献[1,2]研究的是带线性边界条件的四阶常微分方程，当前这类问题已经被许多学者所研究和推广[3-7]. 最近，有学者研究了带非线性边界条件的二阶微分方程解的存在性问题，如 Hai 和 Shivaji[8]研究了带非线性边界条件的二阶问题

$$\begin{cases} u''(t)=-\lambda h(t)f(u(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=0,u'(1)+C(u(1))u(1)=0 \end{cases} \quad (3)$$

正解的存在性. 自然要问：当四阶微分方程带有非线性边界条件时，问题正解的存在性又如何？受以上文献启发，本文运用锥拉伸与压缩不动点定理研究一类带非线性边界条件的四阶常微分方程

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda f(t,u(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=u'''(1)=0, \\ u'(1)+C(u(1))u(1)=0 \end{cases} \quad (4)$$

正解的存在性.

本文总假定：

(H1) λ 是一个正参数；

(H2) $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ 满足 L^1-Carathe-odory 条件；

(H3) $C:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，

并记

$$f_0=\lim_{u\to 0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,\mathrm{u})}{u},$$

$$f_\infty=\lim_{u\to+\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,\mathrm{u})}{u},$$

$$f^0=\lim_{u\to 0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,\mathrm{u})}{u},$$

$$f^\infty=\lim_{u\to+\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,\mathrm{u})}{u}.$$

$$A=\int_{\frac14}^{\frac34}\int_0^1 G_{\mathrm{u}}(\frac12,s)G_1(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$

$$B=\int_0^1\int_0^1 G_{\mathrm{u}}(s,s)G_1(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

本文的主要结果如下：

定理 1.1　假设条件(H1)～(H3)成立. 若 $\lambda\in(\frac{4}{Af_\infty},\frac{1}{Bf^0})$，则问题(4)至少存在一个正解.

定理 1.2　假设条件(H1)～(H3)成立. 若 $\lambda\in(\frac{4}{Af_0},\frac{1}{Bf^\infty})$，则问题(4)至少存在一个正解.

注 1　根据定理 1.1，若 $f_\infty=\infty,f^0=0$，则对任意的 $\lambda\in(0,\infty)$，问题(4)至少存在一个正解.

注 2　根据定理 1.2，若 $f_0=\infty,f^\infty=0$，则对任意的 $\lambda\in(0,\infty)$，问题(4)至少存在一个正解.

注 3　在问题(4)中，若 $C(u(1))=0$，则问题(4)退化为问题(2)，所以本文是对文献[2]中定理 1 的推广.

2　预备知识

引理 2.1[9]　设 E 是 Banach 空间，$K\subset E$ 是 E 中的一个锥. 又设 Ω_1,Ω_2 是 E 中的开子集，有 $0\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 若全连续算子

$$T:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$$

满足

(1)* $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$

或

(2)* $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$，

则 T 在 $T:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 上有一个不动点.

引理 2.2　边值问题

$$\begin{cases} u''(t)=0,t\in(0,1), \\ u(0)=0,u'(1)+\alpha_u u(1)=0 \end{cases}$$

的 Green 函数是

$$G_u(t,s)=\frac{1}{1+\alpha_u}\begin{cases} s(1+\alpha_u(1-t)),0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ t(1+\alpha_u(1-s)),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \end{cases}$$

其中 $\alpha_u=C(u(1))$.

证明　考虑线性边值问题

$$u''(t)=-y(t),t\in(0,1) \quad (5)$$

$$u(0)=0,u'(1)+\alpha_{\mathrm{u}}u(1)=0 \quad (6)$$

(5)式两边从 0 到 t 积分，得

$$u'(t)=u'(0)-\int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

上式两边从 0 到 t 积分，并利用边界条件 $u(0)=0$ 得

$$u(t)=u'(0)t-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s.$$

再利用边界条件 $u'(1)+\alpha_u u(1)=0$ 得

$$u'(0)-\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s+\alpha_u u'(0)-\int_0^1\alpha_u(1-s)y(s)\mathrm{d}s=0.$$

所以

$$u'(0)=\frac{1}{1+\alpha_u}(\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s+\int_0^1\alpha_{\mathrm{u}}(1-s)y(s)\mathrm{d}s).$$

于是

$$u(t)=\frac{1}{1+\alpha_u}\Big(\int_0^1 ty(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 \alpha_u t(1-s)y(s)\mathrm{d}s-\int_0^t (1+\alpha_u)(t-s)y(s)\mathrm{d}s\Big)=$$
$$\frac{1}{1+\alpha_u}\Big(\int_0^t s(1+\alpha_u(1-t))y(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 t(1+\alpha_u(1-s))y(s)\mathrm{d}s\Big)=\int_0^1 G_u(t,s)y(s)\mathrm{d}s.$$

引理 2.3 $G_u(t,s)$有以下性质:

(i) $G_u(t,s)>0,t\in(0,1)$;

(ii) $G_u(t,s)\leqslant G_u(s,s),t,s\in(0,1)$;

(iii) $G_u(t,s)\geqslant\frac{1}{4}G_u(s,s),t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$.

证明 (i),(ii)显然成立.

(iii) 对$\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}$,有

$$\frac{G_u(t,s)}{G_u(s,s)}=\begin{cases}\dfrac{1+\alpha_u(1-t)}{1+\alpha_u(1-s)},s\leqslant t,\\ \dfrac{t}{s},t\leqslant s.\end{cases}\geqslant$$
$$\begin{cases}\dfrac{1+\frac{1}{4}\alpha_u}{1+\alpha_u}>\dfrac{1}{4},s\leqslant t,\\ \dfrac{1}{4},t\leqslant s,\end{cases}$$

所以 $G_u(t,s)\geqslant\frac{1}{4}G_u(s,s),t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$. 证毕.

引理 2.4 设(H1)和(H3)成立. 则对 $y\in C[0,1]$,问题

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=\lambda y(t),t\in(0,1),\\ u(0)=u''(0)=u'''(1)=0,\\ u'(1)+C(u(1))u(1)=0\end{cases}\tag{7}$$

等价于积分方程

$$u(t)=\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(t,s)G_1(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$

其中 $G_1(s,\tau)$表示边值问题

$$\begin{cases}u''(t)=0,t\in(0,1),\\ u(0)=u'(1)=0\end{cases}$$

的 Green 函数,

$$G_1(s,\tau)=\begin{cases}s,0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant 1,\\ \tau,0\leqslant\tau\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

证明 设 $\varphi(t)=\lambda y(t)$, $-v(t)=u''(t)$. 问题(7)可以写成两个二阶问题,即

$$\begin{cases}-v''(t)=\varphi(t),t\in(0,1),\\ v(0)=v'(1)=0,\end{cases}$$
$$\begin{cases}-u''(t)=v(t),t\in(0,1),\\ u(0)=0,u'(1)+C(u(1))u(1)=0.\end{cases}$$

所以

$$v(t)=\int_0^1 G_1(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$u(t)=\int_0^1 G_u(t,s)v(s)ds.$$

因此

$$u(t)=\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(t,s)G_1(s,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

3 主要结果的证明

据引理 2.4,方程(4)有解 $u=u(t)$当且仅当 u 是算子方程

$$u(t)=\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(t,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s:=Tu(t)$$

的解. 这里取 $E=C[0,1]$, 其在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间. 定义

$$P=\{u\in E:u(t)\geqslant 0,\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}u(t)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|\}.$$

易证 P 是 E 中的锥. 显然 $Tu(t)\geqslant 0$. 又因为 $G_u(t,s)\leqslant G_u(s,s)$, $\forall t,s\in(0,1)$. 因此,若 $u\in P$,则

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(t,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

所以

$$\|Tu\|\leqslant\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

进而,由 $G_u(t,s)\geqslant\frac{1}{4}G_u(s,s)$, $\forall t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$,若 $u\in P$,则

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}Tu(t)=\lambda\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}\int_0^1\int_0^1 G_u(t,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac{1}{4}\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\|Tu\|.$$

所以 $T(P)\subset P$. 又因为 $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$ 满足 L^1-Caratheodory 条件，所以对几乎所有的 $t\in[0,1]$，$f(t,\cdot)$ 关于第二个变量连续，且对任意 $r>0$，存在 $g_r(t)\in L^1[0,1]$，使得对任意 $u\in(-r,r)$，$t\in[0,1]$ 有 $f(t,u(t))\leqslant g_r(t)$ 成立. 所以 $T:P\to P$ 是全连续算子.

定理 1.1 的证明　因为 $\lambda\in\left(\frac{4}{Af_\infty},\frac{1}{Bf^0}\right)$，所以存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\frac{4}{A(f_\infty-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{B(f^0+\varepsilon)}.$$

由 f^0 知存在 $H_1>0$，使得对 $0<u\leqslant H_1$，有 $f(t,u(t))\leqslant(f^0+\varepsilon)u$. 因此，若 $u\in P$，$\|u\|=H_1$，则有

$$Tu(t)\leqslant\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\lambda(f^0+\varepsilon)\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda(f^0+\varepsilon)\|u\|\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant\|u\|.$$

记

$$\Omega_1:=\{u\in E:\|u\|\leqslant H_1\}.$$

则

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in P\cap\partial\Omega_1.$$

又由 f_∞ 知，存在 $\widetilde{H}_2>0$，使得对 $u\geqslant\widetilde{H}_2$，有 $f(t,u(t))\geqslant(f_\infty-\varepsilon)u$. 记

$$H_2:=\max\{2H_1,4\widetilde{H}_2\},$$
$$\Omega_2:=\{u\in E:\|u\|<H_2\}.$$

若 $u\in P$，$\|u\|=H_2$，则有

$$\min_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}u(t)\geqslant\frac14\|u\|\geqslant\widetilde{H}_2.$$

因此

$$\|Tu\|\geqslant Tu(\frac12)=$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(\frac12,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda(f_\infty-\varepsilon)\int_0^1\int_0^1 G_u(\frac12,s)G_1(s,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda(f_\infty-\varepsilon)\int_{\frac14}^{\frac34}\int_0^1 G_u(\frac12,s)G_1(s,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac14\lambda(f_\infty-\varepsilon)\int_{\frac14}^{\frac34}\int_0^1 G_u(\frac12,s)G_1(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\|u\|.$$

则

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in P\cap\partial\Omega_2.$$

所以，由引理 2.1 的 $(1)^*$ 知，算子 T 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点，且 $H_1\leqslant\|u\|\leqslant H_2$. 显然 $u(t)>0$. 故问题(4)至少存在一个正解. 证毕.

定理 1.2 的证明　因为 $\lambda\in(\frac{4}{Af_0},\frac{1}{Bf^\infty})$，所以存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\frac{4}{A(f_0-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{B(f^\infty+\varepsilon)}.$$

由 f_0 知，存在 $H_1>0$，使得对 $0<u\leqslant H_1$，有 $f(t,u(t))\geqslant(f_0-\varepsilon)u$. 因此，若 $u\in P$，$\|u\|=H_1$，则有

$$\|Tu\|\geqslant\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(\frac12,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda(f_0-\varepsilon)\int_0^1\int_0^1 G_u(\frac12,s)G_1(s,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda(f_0-\varepsilon)\int_{\frac14}^{\frac34}\int_0^1 G_u(\frac12,s)G_1(s,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac14\lambda(f_0-\varepsilon)\int_{\frac14}^{\frac34}\int_0^1 G_u(\frac12,s)G_1(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\|u\|.$$

记

$$\Omega_1:=\{u\in E:\|u\|\leqslant H_1\}.$$

则

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in P\cap\partial\Omega_1.$$

现考虑以下两种情况：

(i) $f^\infty\neq0$. 由 f^∞ 知，存在 $\widetilde{H}_2>0$，使得对 $u\geqslant\widetilde{H}_2$ 有 $f(t,u(t))\leqslant(f^\infty+\varepsilon)u$. 记

$$H_2:=\max\{2H_1,4\widetilde{H}_2\},$$
$$\Omega_2:=\{u\in E:\|u\|<H_2\}.$$

若 $u\in P$，$\|u\|=H_2$，则有

$$\min_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}u(t)\geqslant\frac14\|u\|\geqslant\widetilde{H}_2.$$

因此

$$Tu(t)\leqslant\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda(f^\infty+\varepsilon)\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\lambda(f^{\infty}+\varepsilon)\|u\|\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)d\tau ds\leqslant \|u\|.$$

则

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in P\cap\partial\Omega_2.$$

(ii) $f^{\infty}=0$. 则由 $f^{\infty}=0$ 知,存在 $\widetilde{H}_2>0$,使得对 $u\geqslant\widetilde{H}_2$ 有 $f(t,u(t))\leqslant\varepsilon u$. 分以下两种情况讨论:

(A) f 有界,即存在 N,使得对 $u\in(0,\infty)$,有 $f(t,u(t))\leqslant N$. 取 $H_2:=\max\{2H_1,\lambda NB\}$,使得对 $u\in P$ 及 $\|u\|=H_2$,有

$$Tu(t)\leqslant\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant N\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant H_2.$$

所以 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$.

(B) f 无界. 取 $H_2>\{2H_1,\widetilde{H}_2\}$,使得 $f(t,u(t))\leqslant f(t,H_2)$, $0<u\leqslant H_2$. 则对 $u\in P$ 及 $\|u\|=H_2$,有

$$Tu(t)\leqslant\lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant \lambda\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)f(\tau,H_2)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant \lambda\varepsilon H_2\int_0^1\int_0^1 G_u(s,s)G_1(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\leqslant H_2.$$

所以 $\|Tu\|\leqslant\|u\|$.

综上所述,只要记

$$\Omega_2:=\{u\in E:\|u\|<H_2\},$$

就有

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in P\cap\partial\Omega_2.$$

从而由引理 2.1 的 (2)* 知,算子 T 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点,且 $H_1\leqslant\|u\|\leqslant H_2$. 显然 $u(t)>0$. 故问题(4)至少存在一个正解. 证毕.

参考文献:

[1] Ma R Y, Wang H Y. On the existence of positive solutions of fourth-order ordinary differential equations [J]. Appl Anal, 1995, 59: 7.

[2] Graef J R, Yang B. Existnence and nonexistence of positive solutions of fourth order nonlinear boundary value problems [J]. Appl Anal, 2000, 74: 201.

[3] Yao Q L. Positive solutions and eigenvalue intervals of a nonlinear singular fourth-order boundary value problem [J]. Appl Math, 2013, 58: 93.

[4] Liu B. Positive solutions of fourth-order two-point boundary value problems [J]. Appl Math Comput, 2004, 148: 407.

[5] Song Y. A nonlinear boundary value problem for fourth-order elastic beam equations [J]. Bound Value Probl, 2014, 2014: 191.

[6] Yao Q L. Positive solutions for eigenvalue problems of fourth-order elastic beam equations [J]. Appl Math Lett, 2004, 17: 237.

[7] Graef J R. A three point boundary value problem for nonlinear fourth order differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2003, 287: 217.

[8] Hai D D, Shivaji R. Positive radial solutions for a class of singular superlinear problems on the exterior of a ball with nonlinear boundary conditions [J]. J Math Anal Appl, 2017, 456: 872.

[9] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社, 1985.

引用本文格式:

中 文:张亚莉. 一类非线性四阶常微分方程边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2019, 56: 1004.

英 文:Zhang Y L. Existence of positive solutions for a class of nonlinear fourth-order ordinary differential equations with boundary values [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 1004.