doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.02.007

分数阶自治 Kirchhoff 方程径向变号解的存在性

张丹丹，丁　凌
(湖北文理学院数学与统计学院，襄阳 441053)

摘　要：本文考虑全空间上一类分数阶自治 Kirchhoff 方程变号解的存在性. 首先，我们证明了分数阶自治的 Kirchhoff 方程在适当条件下与一个分数阶自治 Schrödinger 系统等价；然后，利用分数阶自治 Schrödinger 方程的径向变号解的存在性结果，我们证明了分数阶自治的 Schrödinger 系统的解的存在性；最后，我们得到了分数阶自治的 Kirchhoff 方程径向变号解的存在性.

关键词：分数阶；Kirchhoff 方程；自治 Schrödinger 系统；变号解
中图分类号：O176.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)02-0243-04

Existence of radial sign-changing solution for a fractional autonomous Kirchhoff equation

ZHANG Dan-Dan, *DING Ling*
(School of Mathematics and Statistics, Hubei University of Arts and Science, Xiangyang 441053, China)

Abstract: The existence of sign-changing solution for a fractional autonomous Kirchhoff equation is considered in the whole space. We prove that this equation is equivalent to a fractional autonomous Schrödinger system under appropriate conditions. Then, by using the existence of radial sign-changing solution of the fractional autonomous Schrödinger equation, the existence of solutions for the fractional autonomous Schrödinger system is proved. The existence of radial sign-changing solution for the fractional autonomous Kirchhoff equation is obtained as well.

Keywords: Fractional order; Kirchhoff equation; Autonomous Schrödinger system; Sign-changing solution
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

本文考虑全空间上分数阶自治的 Kirchhoff 方程：

$$\left(a+b\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta)^{\alpha}u+u=|u|^{p-1}u,\ x\in\mathbf{R}^N,\ N\geqslant 2 \tag{1}$$

其中 $a\geqslant 0$, $b>0$, $\alpha\in(0,1)$, $p\in(1,2_\alpha^*-1)$, $2_\alpha^*=\frac{2N}{N-2\alpha}$. 当 $b\neq 0$ 时，方程(1)就是 Kirchhoff 类方程.

近年来，Kirchhoff 方程得到了广泛的关注. 由于 Kirchhoff 类非局部项与弹性弦自由振动的达朗贝尔波方程有关，它常被用于描述弹性弦横截振动产生的弦长变化规律，后来也被用来描述生物系统中种群密度的变化规律，奇异问题与非牛顿流体，粘性流体的边界层现象及化学异构催化剂等.

收稿日期：2019-03-11
基金项目：国家自然科学基金(11861021)；湖北省教育厅科研研究计划(B2018156)；湖北文理学院开放基金(XK2018034)
作者简介：张丹丹(1982－)，女，湖北襄阳人，讲师，主要从事非线性泛函分析的研究. E-mail:343291710@qq.com

近年来,分数阶微分方程已被广泛应用于分形学、材料科学、控制科学、信号分析及工程科学等学科领域. 目前,多数文献(如文献[1])都仅考虑整数阶 Kirchhoff 方程,对分数阶 Kirchhoff 方程的研究较少. 文献[2-7]研究了分数阶 Kirchhoff 类方程解的存在性. 其中,对于有界区域,文献[2-6]用截断理论及亏格等临界点理论得到了具有临界指数的分数阶 Kirchhoff 类方程非平凡解的存在性、渐近行为及多重性. 对于全空间或无界区域,文献[6-8]用约束变分及形变引理得到了分数阶非自治的 Kirchhoff 类方程变号解的存在性. 受文献[5-7]的启发,本文研究分数阶自治的 Kirchhoff 方程变号解的存在性.

当 $a=1$, $b=0$, $\alpha=1$ 时,方程(1)变成整数阶 Schrödinger 方程(场方程)

$$-\Delta u+u=|u|^{p-1}u,\ x\in\mathbf{R}^N,N\geqslant 2,$$

其中 $p\in(1,2_\alpha^*-1)$. 对该方程的研究可参考文献[8]及其参考文献.

当 $a=1$, $b=0$, $\alpha\in(0,1)$时,方程(1)变成分数阶 Schrödinger 方程

$$(-\Delta)^\alpha u+u=|u|^{p-1}u,\ x\in\mathbf{R}^N,N\geqslant 2 \tag{2}$$

其中 $\alpha\in(0,1)$, $p\in(1,2_\alpha^*-1)$. 该方程也有该多研究,如文献[9]用 Brouwer 度理论和变分方法得到了如下结果:

定理 A 假定 $\alpha\in(0,1)$, $p\in(1,2_\alpha^*-1)$. 则方程(2)有一个径向变号解.

本文将利用定理 A 来研究方程(1)的径向变号解的存在性.

2 预备知识

对于 $\alpha\in(0,1)$,考虑分数阶 Sobolev 空间

$$H^\alpha(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})=\{u\in L^2(\mathbf{R}^N,\mathbf{R}):\int_{\mathbf{R}^N}(|\xi|^{2\alpha}|\hat{u}(\xi)|^2+|\hat{u}(\xi)|^2)\mathrm{d}\xi\}$$

及

$$H=H_r^\alpha(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})=\{u\in H^\alpha(\mathbf{R}^N,\mathbf{R}): u(x)=u(|x|)\}.$$

定义 H 中的内积和范数分别为

$$(u,v)_H=\iint_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\mathbf{R}^N}u(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

$$\|u\|_H^2=\iint_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\mathbf{R}^N}|u(x)|^2\mathrm{d}x,$$

其中 $\hat{u}$ 是 u 的 Fourier 变换,即

$$\hat{u}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^N}u(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\mathrm{d}x,\xi\in\mathbf{R}^N.$$

3 主要结果

引理 3.1 分数阶 Kirchhoff 方程(1)和分数阶 Schrödinger 系统等价. 即 $u\in H$ 是方程(1)的解当且仅当存在 $v\in H,\lambda>0$ 且 $v(\cdot)=u(\lambda^{\frac12}\cdot)$,使得$(v,\lambda)$是如下 Schrödinger 系统的解:

$$\begin{cases}(-\Delta)^\alpha v+v=|v|^{p-1}v,\\ a+b\lambda^{\frac{N-2\alpha}{2}}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)|^2\,\mathrm{d}x=\lambda^\alpha\end{cases}\tag{3}$$

证明 必要性. 假定 $\lambda>0,v\in H,(v,\lambda)$是系统(3)的解. 令 $v(\cdot)=u(\lambda^{\frac12}\cdot)$. 则

$$u(x)=v(\lambda^{-\frac12}x)=v(y)\in H.$$

故

$$\left(a+b\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u|^2\mathrm{d}x\right)(-\Delta)^\alpha u+u=$$
$$\lambda^{-\alpha}\left(a+b\lambda^{\frac{N-2\alpha}{2}}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(y)|^2\mathrm{d}y\right)\cdot$$
$$(-\Delta)^\alpha v(y)+v(y)=(-\Delta)^\alpha v(y)+v(y)=$$
$$|v(y)|^{p-1}v(y)=|u(x)|^{p-1}u(x).$$

故 $u(x)=v(\lambda^{-\frac12}x)=v(y)\in H$ 是方程(1)的解.

充分性. 设 $u\in H$ 是方程(1)的解. 令 $v(x)=u(\lambda^{\frac12}x)=u(y)\in H$,

$$a+b\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)|^2\mathrm{d}x=\lambda^\alpha\tag{4}$$

由 $v(x)=u(\lambda^{\frac12}x)$知 $u(x)=v(\lambda^{-\frac12}x)$. 则

$$\lambda^\alpha=a+b\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)|^2\mathrm{d}x=$$
$$a+b\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(\lambda^{-\frac12}x)|^2\lambda^{-\alpha}\mathrm{d}x=$$
$$a+b\lambda^{-\alpha}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(\lambda^{-\frac12}x)|^2\mathrm{d}x.$$

令 $\lambda^{-\frac12}x=y$. 则 $x=\lambda^{\frac12}y,\mathrm{d}x=\lambda^{\frac{N}{2}}\mathrm{d}y$. 换元后得

$$\lambda^\alpha=a+b\lambda^{-\alpha}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(\lambda^{-\frac12}x)|^2\mathrm{d}x=$$
$$a+b\lambda^{\frac{N}{2}-\alpha}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(y)|^2\,\mathrm{d}y,$$

即

$$\lambda^\alpha=a+b\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)|^2\mathrm{d}x=$$
$$a+b\lambda^{\frac{N-2\alpha}{2}}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(y)|^2\,\mathrm{d}y\tag{5}$$

根据式(4)和 $u\in H$ 是方程(1)的解得

$$(-\Delta)^\alpha v(x)+v(x)=(-\Delta)^\alpha u(y)+u(y)=$$
$$\lambda^\alpha\ (-\Delta)^\alpha u(\lambda^{\frac{1}{2}}x)+u(\lambda^{\frac{1}{2}}x)=$$
$$|v(x)|^{p-1}v(x) \tag{6}$$

由式(5)和(6)知 $v(x)=u(\lambda^{\frac{1}{2}}x)=u(y)\in H$ 是系统(3) 的解. 证毕.

引理 3.2　如果

$$m=\inf\{\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)|^2\,\mathrm{d}x: v\in M\},$$

其中 $M=\inf\{v\in H\backslash\{0\}: v$ 是系统(3)中第一个方程的解$\}$，则 $m>0$.

证明　对任意的 $v\in M\backslash\{0\}$，由 Pohozaev 等式有

$$\frac{N-2\alpha}{2N}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|v|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N}|v|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

由插值不等式，对任意小的 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$ 使得下列不等式成立：

$$\frac{N-2\alpha}{2N}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}|v|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}\int_{\mathbf{R}^N}|v|^{p+1}\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{\mathbf{R}^N}|v|^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbf{R}^N}|v|^{2_\alpha^*}\mathrm{d}x \tag{7}$$

于是由 $D^{\alpha,2}(\mathbf{R}^N)$ 嵌入到 $L^{2_\alpha^*}(\mathbf{R}^N)$ 的连续性和(7)式可得

$$S_\alpha\left(\int_{\mathbf{R}^N}|v|^{2_\alpha^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2_\alpha^*}}\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v|^2\mathrm{d}x\leqslant C_1\int_{\mathbf{R}^N}|v|^{2_\alpha^*}\mathrm{d}x \tag{8}$$

对某个 $C_1>0$ 成立. 由(8)式可推出

$$\int_{\mathbf{R}^N}|v|^{2_\alpha^*}dx\geqslant\left(\frac{S_\alpha}{C_1}\right)^{\frac{2_\alpha^*}{2_\alpha^*-2}}>0.$$

上式代入(8)式，可存在某一个正数 $\eta>0$ 使得 $\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\eta$. 因而 $m\geqslant\eta>0$.

引理 3.3　假定 $a\geqslant0$，$b>0$，$\alpha\in(0,1)$，$p\in(1,2_\alpha^*-1)$. 如果

(i) 当 $N=2,3$ 时，$\alpha\in\left(\frac{N}{4},1\right)$；

(ii) 当 $N=2,3$，$\alpha=\frac{N}{4}$ 时，存在 $b_0>0$ 使得 $0<b<b_0$；

(iii) 当 $N\geqslant2$，$0<\alpha<\min\left\{\frac{N}{4},1\right\}$ 时，存在 $b_0>0$ 使得如下不等式成立：

$$\left[\frac{b(1-\alpha)}{b_0\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}-a-\frac{b}{b_0}\left[\frac{b(1-\alpha)}{b_0\alpha}\right]^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}}>0,$$

则系统(3)至少有一对解(v,λ)，其中 $v\in H$ 是径向变号的，$\lambda>0$.

证明　对任意的 $v\in H\backslash\{0\}$，在 $\mathbf{R}^+$ 上定义函数

$$h_v(\lambda)=\lambda^\alpha-a-b\lambda^{\frac{N-2\alpha}{2}}\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

当 $N\geqslant2$ 时，由定理 A 知，$\alpha\in(0,1)$，$p\in(1,2_\alpha^*-1)$. 则方程(2)有一个径向变号解，不妨设为 $v\in H\backslash\{0\}$. 方程(2)就是系统(3)的第一个方程.

下证当 v 是系统(3)的第一个方程的径向变号解时，满足系统(3)的第二个方程的 $\lambda>0$ 是存在的，即证 $h_v(\lambda)$有正的零点. 设

$$c=b\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

这里 v 是系统(3)的第一个方程的径向变号解. 根据引理 3.2 知 $c>0$. 则 $h_v(\lambda)=\lambda^\alpha-a-c\lambda^{\frac{N-2\alpha}{2}}$.

(i) 当 $N=2,3$，$\alpha\in\left(\frac{N}{4},1\right)$时，有 $\alpha>\frac{N-2\alpha}{2}$，$h_v(0)=-a\leqslant0$，且满足当 $\lambda\to0^+$，有 $h_v(\lambda)\to0^-$；当 $\lambda\to+\infty$，有 $h_v(\lambda)\to+\infty$. 由零点定理知 $h_v(\lambda)$至少有一个正的零点. 则系统(3)有一对解(v,λ)，其中 $v\in H$ 是径向变号的，$\lambda>0$.

(ii) 当 $N=2,3$，$\alpha=\frac{N}{4}$时，有 $\alpha=\frac{N-2\alpha}{2}$，$h_v(\lambda)=(1-c)\lambda^{\frac{N}{4}}-a$. 显然当 $c=b\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)|^2\mathrm{d}x<1$ 时，即当 $b<\left(\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{-1}$ 时，$h_v(\lambda)$有正的零点$\left(\frac{a}{1-c}\right)^{\frac{4}{N}}$. 记

$$b_0=\left(\int_{\mathbf{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{-1}.$$

则存在 $b_0>0$ 使得 $0<b<b_0$ 时，$h_v(\lambda)$有正的零点$\left(\frac{a}{1-c}\right)^{\frac{4}{N}}$. 则系统(3) 有一对解$(v,\lambda)$，其中 $v\in H$ 是径向变号的，$\lambda>0$.

(iii) 当 $N\geqslant2$，$0<\alpha<\min\left\{\frac{N}{4},1\right\}$时，有 $\alpha<\frac{N-2\alpha}{2}$，$h_v(0)=-a\leqslant0$，且满足当 $\lambda\to0^+$，有 $h_v(\lambda)\to0^-$；当 $\lambda\to+\infty$，有 $h_v(\lambda)\to-\infty$. 令 $h_v'(\lambda)=0$. 则

$$\lambda^*=\left[\frac{c(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{\frac{1}{2\alpha-1}}=\left[\frac{b(1-\alpha)}{b_0\alpha}\right]^{\frac{1}{2\alpha-1}}$$

使得 $h_v'(\lambda^*)=0$ 及

$$h_v(\lambda^*)=\max_{\lambda>0}h_v(\lambda)=\left[\frac{b(1-\alpha)}{b_0\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}-a-\frac{b}{b_0}\left[\frac{b(1-\alpha)}{b_0\alpha}\right]^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}}>0.$$

则 $h_v(\lambda)$ 至少有两个正的零点 $0<\lambda_1<\lambda^*<\lambda_2<+\infty$. 则系统(3)至少有两对解 (v,λ_i)，其中 $v\in H$ 是径向变号的，$\lambda_i>0(i=1,2)$.

定理 3.4 假定 $a\geqslant 0$，$b>0$，$\alpha\in(0,1)$，$p\in(1,2_\alpha^*-1)$. 如果

(i) 当 $N=2,3$ 时，$\alpha\in\left(\frac{N}{4},1\right)$；

(ii) 当 $N=2,3$，$\alpha=\frac{N}{4}$ 时，存在 $b_0>0$ 使得 $0<b<b_0$；

(iii) 当 $N\geqslant 2$，$0<\alpha<\min\left\{\frac{N}{4},1\right\}$ 时，存在 $b_0>0$ 使得如下不等式成立：

$$\left[\frac{b(1-\alpha)}{b_0\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}-a-\frac{b}{b_0}\left[\frac{b(1-\alpha)}{b_0\alpha}\right]^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}}>0,$$

则方程(1)至少有一个径向变号解.

证明 由引理 3.1 和引理 3.3 可知，方程(1)有一个径向变号解，故定理 3.4 得证.

注 分数阶 Kirchhoff 类方程是一个非局部的偏微分方程，非局部积分项给方程解的研究带来困难. 但本文发现分数阶自治的 Kirchhoff 类方程可以转化为一个分数阶自治的 Schrödinger 系统. 特别地，系统的第一个方程是一个分数阶的自治 Schrödinger 方程. 因此，如果单个分数阶自治的 Schrödinger 方程解的存在性结果是已知的，则相应分数阶自治 Kirchhoff 类方程在一定条件下也有相应的结果. 这就给分数阶自治的 Kirchhoff 类方程的研究提供了一种新方法.

参考文献：

[1] 丁凌，汪继秀，张丹丹. 全空间上具有临界指数的 Kirchhoff 类方程两个正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：457.

[2] Fiscella A，Valdinoci E. A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator [J]. Nonlinear Anal-Theor，2014，94：156.

[3] Fiscella A. Infinitely many solutions for a critical Kirchhoff type problem involving a fractional operator [J]. Differ Integral Equ，2016，29：513.

[4] Autuori G，Fiscella A，Pucci P. Stationary Kirchhoff problems involving a fractional elliptic operator and a critical nonlinearity [J]. Nonlinear Anal Theor，2015，125：699.

[5] Zhang J，Lou Z L，Ji Y J，*et al*. Ground state of Kirchhoff type fractional Schrödinger equations with critical growth [J]. J Math Anal Appl，2018，462：57.

[6] Cheng K，Gao Q. Sign-changing solutions for the stationary Kirchhoff problems involving the fractional Laplace in $\mathbf{R}^N$ [J]. Acta Math Sci，2018，38B：1712.

[7] Chen X T，Tang X H. Existence and asymptotic behavior of Sign-changing solutions for fractional Kirchhoff-type problems in low dimensions [J]. Nonlinear Differ Equ Appl，2018，25：40.

[8] Wang Z P，Zhou H S. Radial sign-changing solution for fractional Schrödinger equation [J]. Discrete Cont Dyn-A，2016，36：499.

[9] Berestycki H，Lions P L. Nonlinear scalar field equations，II Existence of infinity many solutions [J]. Arch Rational Mech Anal，1983，82：347.

引用本文格式：

中 文：张丹丹，丁凌. 分数阶自治 Kirchhoff 方程径向变号解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：243.

英 文：Zhang D D，Ding L. Existence of radial sign-changing solution for a fractional autonomous Kirchhoff equation [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2020，57：243.