一个含扩散项的抗病毒药物治疗模型的动态分歧

李　良[1]，王会超[2]
(1. 四川大学数学学院，成都 610064；2. 许昌学院数学与统计学院，许昌 461000)

摘　要：本文利用非线性演化方程的动态分歧理论研究了一个 Neumann 边界条件下的含扩散项的抗病毒药物治疗模型的动态分歧及其实际意义. 数值模拟表明，模型是有效的.

关键词：动态分歧理论；抗病毒药物治疗模型；数值模拟
中图分类号：O175.2　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.021003

Dynamical bifurcation of an antiviral drug therapy model with diffusion term

LI Liang[1], *WANG Hui-Chao*[2]
(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Xuchang College, Xuchang 461000, China)

Abstract: In this paper, by using the dynamical bifurcation theory of nonlinear evolution equations, we consider an antiviral drug therapy model under Neumann boundary condition, explore the dynamical bifurcation and its practical significance. Numerical simulation shows the effectiveness of the model.

Keywords: Dynamical bifurcation theory; Antiviral drug therapy model; Numerical stimulation

1　引　言

本文所研究的具有扩散项抗病毒治疗模型[1-7]是在文献[1]中的基础模型后添加扩散项后得到的. 原模型只考虑了均匀分布情形，添加了扩散项的模型则更贴近实际. 模型的定义如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\Delta u_1-\gamma u_1+\nu u_2+\lambda\beta u_1u_3+\mu,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=\Delta u_2-(\delta+\nu)u_2+\lambda\beta u_1u_3,\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t}=\Delta u_3+\varepsilon\theta u_2-\alpha u_3,\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n}=\partial\Omega=\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\partial\Omega=\dfrac{\partial u_3}{\partial n}\partial\Omega=0,\\ u_1(0)=u_1^0,u_2(0)=u_2^0,u_3(0)=u_3^0\end{cases}\tag{1}$$

其中 u_1 表示未感染细胞数，u_2 表示感染细胞数，u_3 表示游离病毒数，未感染细胞以常熟率 μ 生成，以速率 γu_1 死亡，βu_1u_3 表示未感染细胞与游离病毒接触之后变成感染细胞的速率，δu_2 表示感染细胞裂解死亡的速率，αu_3 表示游离病毒被清除的速率，Δu 表示扩散率，ν 表示感染细胞回复至未感染细胞的比率，θu_2 表示感染细胞裂解后产生病毒速率. 抗病毒药物主要以干扰素和一拉米夫啶为代表，其中 $1-\varepsilon$ 表示治疗效果($0<\varepsilon<1$)，$1-\lambda$ 表示核苷类药物阻碍从 DNA 到 CCCDNA 循环转移的效率. 此外，Neumann 边界条件表示细胞和病毒与外界没有进行交换. 这里我们只考虑 $x\in\Omega=[0,l]$ 和 $t>0$ 的情形.

2　预备知识

针对非线性演化方程的抽象形式[2]

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=L_\lambda u+G(u,\lambda)\tag{2}$$

其中 λ 为参数，我们假设 $L_\lambda: H_1\to H$ 为一个全连

收稿日期：2018-04-20
基金项目：国家自然科学基金(11471228)
作者简介：李良(1991－)，男，湖北咸宁人，硕士研究生，主要研究领域为数学物理方法.
通讯作者：王会超. E-mail：289347757@qq.com

续算子,且为扇形算子,H_1 和 H 都为 Hilbert 空间($H_1 \to H$ 紧稠), 并假设 L_λ 的特征值$\{\beta_j(\lambda) \in C | j=1,2,\cdots\}$满足条件

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\ \beta_i(\lambda)<0, \lambda<\lambda_0, \\ \mathrm{Re}\ \beta_i(\lambda)=0, \lambda=\lambda_0, \forall\ 1\leqslant i\leqslant m, \\ \mathrm{Re}\ \beta_i(\lambda)>0, \lambda>\lambda_0, \\ \mathrm{Re}\ \beta_j(\lambda_0)\neq 0, \forall\ j\geqslant m+1 \end{cases} \tag{3}$$

由线性全连续场的谱理论可知,H_1 和 H 有分解

$$H_1=E_1^\lambda \oplus E_2^\lambda, H=E_1^\lambda \oplus \overline{E_2^\lambda},$$

其中

$$E_1^\lambda=\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_i(\lambda), i=1,2,\cdots,m\},$$
$$E_2^\lambda=\{u\in X_1 | \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_i^*(\lambda)\rangle=0, \forall\ 1\leqslant i\leqslant m\}.$$

算子 L_λ 有分解

$$L_1^\lambda=L_\lambda|_{E_1^\lambda}: E_1^\lambda \to \overline{E_1^\lambda},$$
$$L_2^\lambda=L_\lambda|_{E_2^\lambda}: E_2^\lambda \to \overline{E_2^\lambda}.$$

另外,非线性项算子 $G(u,\lambda)$在 $u=0$ 处可展开成如下形式:

$$G(u,\lambda)=G_n(u,\lambda)+o(\|u\|_{H_\sigma}^n) \tag{4}$$

其中 $n\geqslant 2$ 是一个整数,且 $G_n(u,\lambda)$是一个 n 重线性算子. 空间 H_σ 的定义参见文献[3].

定理 2.1[3] 假设条件(3)成立,且 $G(u,\lambda)$有形如(4)式的一阶 Taylor 展开式. 那么在 λ_0 附近中心函数 $\Phi(x,\lambda)$可表示为如下形式:

$$\Phi(x,\lambda)=-(L_2^\lambda)^{-1}P_2G_k(x,\lambda)+ O(|\mathrm{Re}\ \beta(\lambda)|\ \|x\|^k)+o(\|x\|^k),$$

其中 $\beta(\lambda)$是形如(3)式的特征值, $x=\sum_{i=1}^m x_i\boldsymbol{e}_i\in E_1^\lambda$.

另外,文中需要用到的 Morse 指数理论可参见文献[3].

3 方程处理

现在我们来对方程(1)来进行处理. 设模型具有平凡解$(u_1,u_2,u_3)=(\mu/\gamma,0,0)$. 令$(\overline{u_1},\overline{u_2},\overline{u_3})=(u-\mu/\gamma,u_2,u_3)$. 代入模型,再令$(\overline{u_1},\overline{u_2},\overline{u_3})=(u_1,u_2,u_3)$可得 Neumann 边界条件下的方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\Delta u_1-\gamma u_1+\upsilon u_2-\dfrac{\lambda\beta\mu}{\gamma}u_3-\lambda\beta u_1u_3, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=\Delta u_2-(\delta+\upsilon)u_2+\dfrac{\lambda\beta\mu}{\gamma}u_3+\lambda\beta u_1u_3, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t}=\Delta u_3+\varepsilon\theta u_2-\alpha u_3, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n}=|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial u_2}{\partial n}|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial u_3}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0, \\ u_1(0)=u_1^0-\dfrac{\mu}{\lambda}, u_2(0)=u_2^0, u_3(0)=u_3^0 \end{cases} \tag{5}$$

我们将方程(5)化成形如方程(2)的形式. 为此,首先建立空间如下:

$$H_1=\{\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)\in H^2(\Omega,\mathbf{R}^3) | \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0\},$$
$$H=\{(u_1,u_2,u_3)\in L^2(\Omega,\mathbf{R}^3)\}.$$

令 $L_\lambda=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_\lambda$,其中

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_\lambda\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} -\gamma & \nu & -\dfrac{\lambda\beta\mu}{\gamma} \\ 0 & -(\delta+\nu) & \dfrac{\lambda\beta\mu}{\gamma} \\ 0 & \varepsilon\theta & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u},\lambda)=\begin{pmatrix} -\lambda\beta u_1u_3 \\ \lambda\beta u_1u_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

易知,$L_\lambda: H_1\to H$ 是全连续算子,并且为扇形算子, $G(\cdot,\lambda): H_1\to H$ 满足条件(4). 程化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=L_\lambda u+G(u,\lambda), \\ u(0)=\varphi(x). \end{cases}$$

现在我们来算方程(5)的特征根和特征向量.

首先,求拉普拉斯算子的特征值. 由

$$\begin{cases} -\Delta\psi_k=\rho_k\psi_k, \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0, \\ \int_0^l \psi_k^2\mathrm{d}x=1 \end{cases}$$

可得

$$\rho_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \psi_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}, k=1,2,\ldots,$$

$$\psi_0=\sqrt{\frac{1}{l}}, 0=\rho_0<\rho_1<\rho_2<\cdots.$$

利用公式 $L_\lambda\Psi=C\Psi$,其中 $\Psi=(c_1\psi_k,c_2\psi_k,c_3\psi_k)^T$,可求得特征值 $\beta_k^i(i=1,2,3)$和特征向量 $\boldsymbol{e}_k^i(i=1,2,3)$为

$$\beta_k^1=\frac{-(2\rho_k+\delta+\nu+\alpha)+\sqrt{(\alpha-\delta-\nu)^2+\dfrac{4\lambda\beta\mu\varepsilon\theta}{\gamma}}}{2},$$

$$\beta_k^2=\frac{-(2\rho_k+\delta+\nu+\alpha)-\sqrt{(\alpha-\delta-\nu)^2+\dfrac{4\lambda\beta\mu\varepsilon\theta}{\gamma}}}{2},$$

$$\beta_k^3=-(\rho_k+\gamma),$$

$$\boldsymbol{e}_k^1=\begin{pmatrix}-\dfrac{\beta_k^1+\rho_k+\delta}{\beta_k^1+\rho_k+\gamma}\psi_k\\ \psi_k\\ \dfrac{\varepsilon\theta}{\beta_k^1+\rho_k+\alpha}\psi_k\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_k^2=\begin{pmatrix}-\dfrac{\beta_k^2+\rho_k+\delta}{\beta_k^2+\rho_k+\gamma}\psi_k\\ \psi_k\\ \dfrac{\varepsilon\theta}{\beta_k^2+\rho_k+\alpha}\psi_k\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_k^3=\begin{pmatrix}\psi_k\\0\\0\end{pmatrix}.$$

同理，可得共轭算子 L_λ^* 的特征向量 $(\boldsymbol{e}_k^i)^*$ $(i=1,2,3)$如下：

$$(\boldsymbol{e}_k^1)^*=\begin{pmatrix}t_k^1\psi_k\\ s_k^1\psi_k\\ m_k^1\psi_k\end{pmatrix},(\boldsymbol{e}_k^2)^*=\begin{pmatrix}t_k^2\psi_k\\ s_k^2\psi_k\\ m_k^2\psi_k\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{e}_k^3)^*=\begin{pmatrix}t_k^3\psi_k\\ s_k^3\psi_k\\ m_k^3\psi_k\end{pmatrix},$$

其中

$$t_k^1=0,s_k^1=\frac{\beta_k^1+\rho_k+\alpha}{\beta_k^1-\beta_k^2},$$

$$m_k^1=\frac{(\beta_k^1+\rho_k+\alpha)(\beta_k^2+\rho_k+\alpha)}{\varepsilon\theta(\beta_k^2-\beta_k^1)}.$$

$$t_k^2=0,s_k^2=\frac{\beta_k^2+\rho_k+\alpha}{\beta_k^2-\beta_k^1},$$

$$m_k^1=\frac{(\beta_k^1+\rho_k+\alpha)(\beta_k^2+\rho_k+\alpha)}{\varepsilon\theta(\beta_k^1-\beta_k^2)},$$

$$t_k^3=1,$$

$$s_k^3=\frac{\beta_k^2+\rho_k+\delta}{\beta_k^2+\rho_k+\gamma}-\frac{(\delta-\gamma)(\beta_k^1+\rho_k+\alpha)}{(\beta_k^1+\rho_k+\gamma)(\beta_k^2+\rho_k+\gamma)},$$

$$m_k^3=\frac{(\delta-\gamma)(\beta_k^1+\rho_k+\alpha)(\beta_k^2+\rho_k+\alpha)}{\varepsilon\theta(\beta_k^1+\rho_k+\gamma)(\beta_k^2+\rho_k+\gamma)}.$$

令 $\lambda_0=\dfrac{\alpha(\delta+\nu)\gamma}{\beta\mu\varepsilon\theta}$. 由

$$\beta_0^1(\lambda)=\frac{-(2\rho_0+\delta+\nu+\alpha)+\sqrt{(\alpha-\delta-\nu)^2+\dfrac{4\lambda\beta\mu\varepsilon\theta}{\gamma}}}{2}$$

易知

$$\beta_0^1(\lambda)\begin{cases}<0,\ \lambda<\lambda_0,\\=0,\ \lambda=\lambda_0,\\>0,\ \lambda>\lambda_0,\end{cases}$$

且在 λ_0 附近有

$$\beta_k^1(\lambda)<0,k=1,2,\ldots,$$

$$\beta_k^2(\lambda)<0,k=0,1,\ldots,$$

$$\beta_k^3(\lambda)<0,k=0,1,\cdots.$$

再根据线性全连续场谱理论得到

$$H_1=E_1\oplus E_2,H=E_1\oplus\overline{E_2},$$

其中

$$E_1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_0^1\},$$

$$E_2=\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_0^2,\boldsymbol{e}_0^3,\boldsymbol{e}_k^1,\boldsymbol{e}_k^2,\boldsymbol{e}_k^3,k=1,2,\cdots\}.$$

因此，任意 $u\in H_1$ 均可表达为下列形式：

$$u=x_0(t)\boldsymbol{e}_0^1+\sum_{k=0}^{+\infty}x_k(t)\boldsymbol{e}_k^1+\sum_{k=0}^{+\infty}y_k(t)\boldsymbol{e}_k^2+\sum_{k=0}^{+\infty}z_k(t)\boldsymbol{e}_k^3,$$

其中 $x_0(t)\boldsymbol{e}_0^1\in E_1$，

$$\sum_{k=1}^{+\infty}x_k(t)\boldsymbol{e}_k^1+\sum_{k=0}^{+\infty}y_k(t)\boldsymbol{e}_k^2+\sum_{k=0}^{+\infty}z_k(t)\boldsymbol{e}_k^3\in E_2.$$

4　结　论

定理 4.1　(i) 当 $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$ 时，系统(1)在$(u_1,u_2,u_3)=(\mu/\gamma,0,0)$处发生混合型跃迁，即存在$(u_1,u_2,u_3)=(\mu/\gamma,0,0)$的一个邻域 $U\subset H_1$，U 被$(u_1,u_2,u_3)=(\mu/\gamma,0,0)$的稳定流形 Γ^λ 分为两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ，使得在 U_1^λ 中系统(1)是不连续跃迁，而在 U_2^λ 中分歧出一个奇点吸引子 $\bar{w}(\lambda)\in U_2^\lambda$，其 Morse 指数为 0，满足

$$\lim_{t\to\infty}\|w(t,\varphi)-\bar{w}(\lambda)\|=0,\forall\varphi\in U_2^\lambda.$$

(ii) 当 $\lambda<\lambda_0$ 时，系统分歧出唯一的鞍点 $\bar{w}(\lambda)$，其 Morse 指数为 1.

(iii) 分歧出的奇点 $\bar{w}(\lambda)$可以表示为

$$\bar{w}(\lambda)=\overline{x_0}\boldsymbol{e}_0^1-\frac{\overline{g_2}}{\beta_0^2}e_0^2-\frac{\overline{g_3}}{\beta_0^3}\boldsymbol{e}_0^3+\begin{pmatrix}\dfrac{\mu}{\gamma}\\0\\0\end{pmatrix}+o(|\lambda-\lambda_0|),$$

其中

$$\overline{x_0}=\frac{\beta_0^1(\lambda)}{\Gamma(\lambda)},\overline{g_2}=\frac{\lambda\beta\varepsilon\theta(\beta_0^1+\delta)(\beta_0^2+\alpha)\overline{x_0}^2}{\sqrt{l}(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^1+\alpha)(\beta_0^1-\beta_0^2)},$$

$$\overline{g_3}=\frac{\lambda\beta\varepsilon\theta\beta_0^1\ \overline{x_0}^2}{\sqrt{l}(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^1+\alpha)}\cdot\left[1-\frac{(\beta_0^2+\delta)(\beta_0^1-\gamma)-(\delta-\gamma)(\beta_0^1+\alpha)}{(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^2+\gamma)}\right],$$

$$\Gamma(\lambda)=\frac{\lambda\beta\varepsilon\theta s_0^1(\beta_0^1+\delta)}{\sqrt{l}(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^1+\alpha)},$$

$$s_0^1=\frac{\beta_0^1+\alpha}{\beta_0^1-\beta_0^2}.$$

式中涉及的一些量的定义可参见文献[3].

证明　令 $\boldsymbol{u}\in H_1$. 那么

$$\boldsymbol{u}=x_0(t)\boldsymbol{e}_0^1+\sum_{k=0}^{+\infty}x_k(t)\boldsymbol{e}_k^1+\sum_{k=0}^{+\infty}y_k(t)\boldsymbol{e}_k^2+\sum_{k=0}^{+\infty}z_k(t)\boldsymbol{e}_k^3,$$

其中 $\boldsymbol{V}_0=x_0(t)\boldsymbol{e}_0^1\in E_1$. 假设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{V}_0+\Phi(V_0,\lambda)$, $\Phi(\cdot,\lambda):E_1\to E_2$ 是中心流形函数. 令 $P_1:H_1\to E_1$, $P_2:H_1\to \overline{E_2}$, P_1 和 P_2 为规范投影. 则有

$$P_1\boldsymbol{u}_t=P_1L_\lambda\boldsymbol{u}+P_1G(\boldsymbol{u},\lambda),$$
$$P_2\boldsymbol{u}_t=P_2L_\lambda\boldsymbol{u}+P_2G(\boldsymbol{u},\lambda),$$

及

$$\langle\boldsymbol{u}_t,(\boldsymbol{e}_0^1)^*\rangle=\langle L_\lambda\boldsymbol{u},(\boldsymbol{e}_0^1)^*\rangle+\langle G(\boldsymbol{u},\lambda),(\boldsymbol{e}_0^1)^*\rangle.$$

化简可得分歧方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}=\beta_0^1x_0+\int_0^1G(\boldsymbol{u},\lambda)(\boldsymbol{e}_0^1)^*\mathrm{d}x \tag{6}$$

令 $L_\lambda^2=L_\lambda|_{E_2}:E_2\to\overline{E_2}$. 因为 $G(\boldsymbol{u},\lambda)$是一个二重线性算子,根据定理 2.1 可得

$$\Phi(\boldsymbol{V}_0,\lambda)=-(L_\lambda^2)^{-1}P_2G(x_0\boldsymbol{e}_0^1)+O(|\beta_0^1|\cdot|_0|^2)+o(|x_0|^2).$$

再令

$$G(x_0\boldsymbol{e}_0^1,\lambda)=g_1\boldsymbol{e}_0^1+g_2\boldsymbol{e}_0^2+g_3\boldsymbol{e}_0^3=\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda\beta x_0^2\varepsilon\theta(\beta_0^1+\delta)}{(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^1+\alpha)}\psi_0^2\\ -\dfrac{\lambda\beta x_0^2\varepsilon\theta(\beta_0^1+\delta)}{(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^1+\alpha)}\psi_0^2\\ 0\end{pmatrix}.$$

则

$$\Phi(\boldsymbol{V}_0,\lambda)=-\frac{g_2}{\beta_0^2}\boldsymbol{e}_0^2-\frac{g_3}{\beta_0^3}\boldsymbol{e}_0^3+O(|\beta_0^1\|x_0|^2)+o(|x_0|^2),$$

其中

$$g_2=\frac{\lambda\beta\varepsilon\theta(\beta_0^1+\delta)(\beta_0^2+\alpha)x_0^2}{\sqrt{l}(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^1+\alpha)(\beta_0^1-\beta_0^2)},$$

$$g_3=\frac{\lambda\beta\varepsilon\theta\beta_0^1x_0^2}{\sqrt{l}(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^1+\alpha)}\cdot\left[1-\frac{(\beta_0^2+\delta)(\beta_0^1-\gamma)-(\delta-\gamma)(\beta_0^1+\alpha)}{(\beta_0^1+\gamma)(\beta_0^2+\gamma)}\right].$$

因此,

$$\langle G(\boldsymbol{u},\lambda),(\boldsymbol{e}_0^1)^*\rangle=-\frac{\lambda\beta\varepsilon\theta s_0^1(\beta_0^1+\delta)x_0^2}{\sqrt{l}(\beta_0^1+\alpha)(\beta_0^1+\gamma)}+o(|x_0^2|),$$

其中 $s_0^1=\dfrac{\beta_0^1+\alpha}{\beta_0^1-\beta_0^2}>0$. 因此分歧方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}=\beta_0^1(\lambda)x_0-\Gamma(\lambda)x_0^2+o(|x_0^2|),$$

其中

$$\Gamma(\lambda)=\frac{\lambda\beta\varepsilon\theta s_0^1(\beta_0^1+\delta)}{\sqrt{l}(\beta_0^1+\alpha)(\beta_0^1+\gamma)}>0.$$

这里 $0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$. 因此方程(7)的稳态解为

$$\overline{x_0}(\lambda)=\beta_0^1(\lambda)/\Gamma(\lambda)+o(|x_0|).$$

从而方程(5)的分歧解为

$$\overline{u}(\lambda)=\overline{x_0}\boldsymbol{e}_0^1-\frac{\overline{g_2}}{\beta_0^2}\boldsymbol{e}_0^2-\frac{\overline{g_3}}{\beta_0^3}\boldsymbol{e}_0^3+o(|\lambda-\lambda_0|).$$

进而方程(1)的分歧解为

$$\overline{w}(\lambda)=\overline{x_0}\boldsymbol{e}_0^1-\frac{\overline{g_2}}{\beta_0^2}\boldsymbol{e}_0^2-\frac{\overline{g_3}}{\beta_0^3}\boldsymbol{e}_0^3+\begin{pmatrix}\dfrac{\mu}{\gamma}\\0\\0\end{pmatrix}+o(|\lambda-\lambda_0|).$$

结论(iii)得证.

当 $\lambda<\lambda_0$,时 $\beta_0^1(\lambda)-2\Gamma(\lambda)\overline{x_0}=-\beta_0^1(\lambda)>0$. 因而 $\boldsymbol{V}_0$ 的 Morse 指数为 1. 又 $\beta_0^2,\beta_0^3,\beta_k^1,\beta_k^2,\beta_k^3<0(k=1,2,\cdots)$,根据上述定理 $\overline{w}(\lambda)$的 Morse 指数为 1. 结论(ii)得证.

最后,因 $f(x_0)=\beta_0^1x_0-\Gamma x_0^2$ 在 $x_0=0$ 的邻域内是 Lipschitz 连续的,因而 $x_0(t)$在 $t=0$ 处连续.

当 $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$ 时,若 $x_0(0)<0$,则 $x_0(t)<0$,从而

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}=\beta_0^1x_0-\Gamma x_0^2<0.$$

从 $\Gamma(\lambda)>0,\beta_0^1>0$ 可知 $\overline{x_0}(\lambda)\to0,\lambda\to\lambda_0$,因而 $\overline{x_0}>0$,且

$$|x_0(t,x_0(0))-\overline{x_0}|>|x_0(0)|>0.$$

这就证明了方程(1)在区域 $x_0(0)<0$ 是不连续跃迁的.

同样方法可以证明

$$\lim_{t\to+\infty}\|x_0(t,x_0(0))-\overline{x_0}\|=0,x_0(0)>0.$$

这就证明了方程(1)在区域 $x_0(0)>0$ 里是连续跃迁的. 结论(i)得证. 证毕.

注　易求得方程(7)的解为

$$x_0(t,x_0(0))=\frac{\beta_0^1}{\Gamma(\lambda)-\left(\Gamma(\lambda)-\dfrac{\beta_0^1}{x_0(0)}\right)\boldsymbol{e}^{-\beta_0^1t}}+o(|\beta_0^1|).$$

当 $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$ 时,如果 $x_0(0)<0$,则 $\Gamma(\lambda)-\beta_0^1/x_0(0)>\Gamma(\lambda)$(因为在 $t=0$ 附近时 $\beta_0^1>0$),从而存在 t_0,使得

$$(\Gamma(\lambda)-\beta_0^1/x_0(0))\boldsymbol{e}^{-\beta_0^1t}=\Gamma(\lambda).$$

因此 $x_0(t,x(0))\to-\infty,t\to t_0^-$. 如果 $x_0(0)>0$,那么 $\Gamma(\lambda)-\beta_0^1/x_0(0)<\Gamma(\lambda)$,

$$x_0(t,x_0(0))\to\overline{x_0}(\lambda)=\beta_0^1(\lambda)/\Gamma(\lambda)+o(|\beta_0^1|)(t\to+\infty),$$

且$\overline{x_0}(\lambda)\to 0(\lambda\to\lambda_0)$. 因而方程(1)会发生混合型跃迁.

方程(1)发生混合型跃迁意义如下. 当$\lambda<\lambda_0$时(即药剂量足够时)，方程(1)只有平凡解$(\mu/\gamma,0,0)$，即随着时间演化最终只有感染病毒，没有感染细胞和游离病毒；当$\lambda>\lambda_0$时，方程(1)有非平凡解$\varpi(\lambda)$且是局部渐进的.

5　数值算例

现在我们来对方程(1)来进行数值模拟. 首先，设定方程里的参数$l=10,\mu=0.2,\gamma=0.5,\delta=0.1,\alpha=0.2,\varepsilon\theta=0.4,\nu=0.1$. 此时控制参数$\lambda_0=\dfrac{\alpha(\delta+\nu)\gamma}{\beta\mu\varepsilon\theta}=0.5$，平衡点为$(\dfrac{\mu}{\gamma},0,0)=(0.4,0,0)$.

当$\lambda=0.45$时，

从图 1 可见，Neumann 边界条件下的解$(u_1,u_2,u_3)\to(0.4,0,0)$，与理论得出的结论一致.

再令$\lambda=0.55$，理论得出的奇点分歧解为$(u_1,u_2,u_3)\to(0.33,0.44,0.41)$.

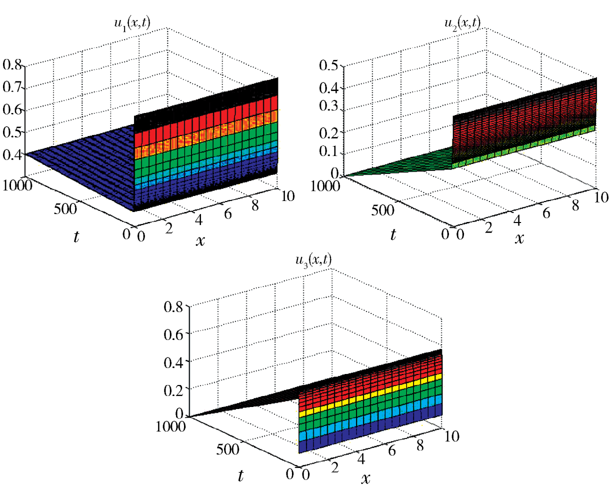

图 1　$\lambda=0.45$ 时模型(1)的平衡解

Fig. 1　The equilibrium solutions of Model (1) when $\lambda=0.45$

图 2 表明，方程解$(u_1,u_2,u_3)\to(0.36,0.17,0.38)$，此时理论解与数值解误差较小.

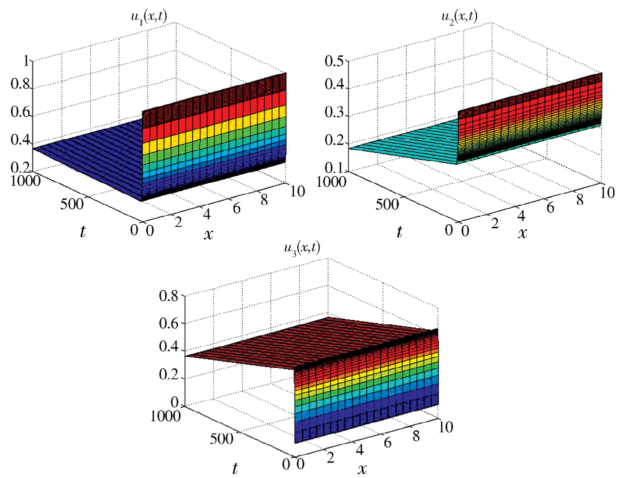

图 2　$\lambda=0.55$ 时模型(1)的分歧解

Fig. 2　The birfurcation solutions of Model (1) when $\lambda=0.55$

参考文献：

[1]　陆征一，周一仓. 数学生物学进展[M]. 北京：科学出版社，2005.

[2]　马天. 偏微分方程理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2011.

[3]　马天，汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧[M]. 北京：科学出版社，2007.

[4]　Ma T，Wang S. Dynamic bifurcations of nonlinear evolution equations [J]. Chin Ann Math：Ser B，2005，26：185.

[5]　Zhang D P，Liu R. Dynamic transition for S-K-T biological competing model with cross diffusion [J]. Math Meth Appl Sci，2018，41：4641.

[6]　王会超，武瑞丽，侯智博. 一类具有扩散项 SIR 模型的动态分歧 [J]. 四川师范大学学报：2014，38：239.

[7]　张强，曾艳，周艳红. 一类广义 Fisher 方程的稳定性和动态分歧[J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：222.

引用本文格式：

中　文：李良，王会超. 一个含扩散项的抗病毒药物治疗模型的动态分歧[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：021003.

英　文：Li L，Wang H C. Dynamical bifurcation of an antiviral drug therapy model with diffusion term [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2021，58：021003.