一类无穷时区上的时间不一致最优控制问题的均衡控制

耿晓琦，张志雄
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：本文研究了一类无穷时区上的时间不一致最优控制问题,其中的目标泛函含有贴现函数,且贴现率充分大.在此类问题中,贴现率不保持恒定使得问题具有时间不一致性,从而局部最优不再等价于整体最优,本文考虑问题的均衡控制而非最优控制.运用针状变分方法,本文推导了容许控制成为均衡控制的充要条件.当贴现函数为指数型时,该结果便退化为无穷时区上的 Pontryagin 最大值原理.最后我们给出该结果在经济学中的一个应用.

关键词：时间不一致控制问题；均衡控制；无穷时区；贴现率
中图分类号：O29　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.031001

Equilibrium control of a class of time-inconsistent optimal control problems with infinite horizon

GENG Xiao-Qi, *ZHANG Zhi-Xiong*
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: We study time-inconsistent optimal control problems with infinite horizon and dominating discount. In this problem, the non-constant discount rate results in the time inconsistency, thus local optimization is not equal to overall optimization anymore. Hence we study the equilibrium control instead of the optimal control. By using the needle variation method, we deduce some sufficient and necessary conditions for the equilibrium control. When the discount function has exponential form, our results degenerate to the Pontryagin maximum principle with infinite horizon. Finally, we give an example in economy.

Keywords: Time-inconsistent optimal control; Equilibrium control; Infinite horizon; Discount rate

1　引　言

无穷时区上的最优控制在经济学中有广泛应用[1-2].在实际应用中,由于贴现率往往不是常数,此类问题的最优控制则具有时间不一致性.1955年,Strotz 较为系统地研究了有限时区上的时间不一致最优控制问题[3],指出非常值的贴现率是导致最优控制问题具有时间不一致性的原因之一.文献[4-6]提出了时间不一致的 Ramesy 模型中容许控制成为均衡控制的必要条件.在离散时间框架下,文献[7]构造了一个阶梯函数并证明其为均衡控制.在连续时间框架下,当值函数充分光滑时文献[8]推导了关于值函数的微分方程和与其等价的积分方程,并证明当贴现率为常数时此微分方程即为 HJB 方程.此外,在一定条件下,该文献也证明了均衡控制的存在性.此外,文献[9]运用微分对策

收稿日期：2020-05-06
基金项目：国家自然科学基金(11971333)
作者简介：耿晓琦(1995－),男,四川成都人,硕士研究生,主要研究方向为最优控制理论与应用. E-mail:galaxygxq@163.com

来处理时间不一致的问题,并提供一个具体例子来说明任意初始状态的最优控制在下一时刻不再保持最优.

对于无穷时区上的最优控制问题,文献[1]提出了经典 Ramesy 模型,从而引出无穷时区上的最优控制问题. 其中,当目标函数为指数型时,文献[2]提出了石油出口国应当以高贴现率来折算未来油品价格. 在某种紧性条件下,文献[10]把证明有限时区上最优控制问题的 Pontryagin 最大值原理的方法推广到无穷时区. 文献[11]提出,对于无穷时区上的最优控制问题,伴随方程的解不一定满足横截条件 $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t)=0$. 文献[12]证明,在一定条件下,Hamilton 函数会随时间趋于零,从而导出横截条件. 当受控方程为仿射形式时,文献[13]构造了一族带惩罚项的有限时区上的问题来证明无穷时区上的最优控制问题,并推导出具非零乘子的 Pontryagin 最大值原理和使横截条件成立的充分条件. 文献[14-18]通过假设贴现率充分大来处理此问题. 文献[15,18-20]采用非光滑分析的方法来推导无穷时区上的最优控制问题中 Pontryagin 最大值原理和动态规划的关系.

在本文中,我们研究一类无穷时区上的时间不一致问最优控制问题. 当贴现率充分大时,我们通过针状变分的方法推导了容许控制成为均衡控制的充要条件. 当贴现函数为指数型时,此结果退化为无穷时区上的 Pontryagin 最大值原理. 最后本文给出了一个应用.

2　预备知识

考虑如下受控方程:

$$\begin{cases}\dot{x}(s)=f(s,x(s),u(s)),\ \text{a. e. } s\in[0,+\infty),\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

目标泛函

$$J(t,x;u(\cdot))=\int_t^{+\infty}\rho(s,t)g(s,x(s),u(s))\mathrm{d}s\tag{2}$$

其中 $f:[0,+\infty)\times\mathbf{R}^n\times U\to\mathbf{R}^n$, $g:[0,+\infty)\times\mathbf{R}^n\times U\to\mathbf{R}$, $\rho:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $x_0\in\mathbf{R}^n$, U 是 $\mathbf{R}^m$ 的非空子集, $u(\cdot)$ 取值于 U. 对任意 $(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbf{R}^n$, $(x(s),u(s))$ 满足方程

$$\begin{cases}\dot{x}(s)=f(s,x(s),u(s)),\ \text{a. e. } s\in[0,+\infty),\\ x(t)=x\end{cases}\tag{3}$$

考虑如下容许控制集:

$$U=\{u(\cdot):[0,+\infty)\to U\mid\int_0^{+\infty}|u(r)|^2\mathrm{d}r<+\infty,u(\cdot)\text{是可测的}\}\tag{4}$$

对任意的 $u^*(\cdot),\tilde{u}(\cdot)\in U$,令

$$u_{t,\varepsilon,\tilde{u}}(s)=\begin{cases}\tilde{u}(s),\quad s\in[t,t+\varepsilon),\\ u^*(s),\quad s\notin[t,t+\varepsilon)\end{cases}\tag{5}$$

容易证明 $u_{t,\varepsilon,\tilde{u}}(\cdot)$ 仍是容许控制. 记 $x^*(\cdot)$ 和 $\tilde{x}_\varepsilon(\cdot)$ 分别为控制系统(1)关于 $u^*(\cdot)$ 和 $u_{t,\varepsilon,\tilde{u}}(\cdot)$ 的状态轨线.

条件(A_1)　令 f,g 关于 u 在 $\mathbf{R}^m$ 上连续, f,g 关于 x 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续可微, ρ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续. 存在 $K\geqslant0$, $\lambda\geqslant0$ 和 $\bar{\omega}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$,使得对任意 $t\in[0,+\infty)$, $u,u_1,u_2\in U$, $x,x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$,下式成立:

$$|f(t,0,u)|\leqslant K(1+|u|);$$
$$|g(t,x,u)|\leqslant K(1+|x|^{\lambda+1}+|u|^2);$$
$$|f(t,x_1,u_1)-f(t,x_2,u_2)|\leqslant K|x_1-x_2|+\bar{\omega}(|u_1-u_2|);$$
$$|f_x(t,x_1,u_1)-f_x(t,x_2,u_2)|\leqslant\bar{\omega}(|x_1-x_2|+|u_1-u_2|);$$
$$|g_x(t,x,u)|\leqslant K(1+|x|^{\lambda}+|u|^2).$$

注 1　当条件(A_1)满足时,对任意 $(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbf{R}^n$, $(x(s),u(s))$ 及 $u(\cdot)\in U$,系统(1)和(3)有唯一解. 当 $\lambda=1$ 时,该控制问题包含具常系数的无穷时区上的 LQ 问题. 在投资-收益模型中, $x(\cdot)$ 表示资本, $u(\cdot)$ 表示投资,目标泛函(2)表示总收益,条件 (A_1) 第二式和第五式则表示收益有某种增长性限制.

条件(A_2)　对任意 $s,t\in[0+,\infty)$, $\rho(s,t)\geqslant0$, $\rho(t,t)=1$; ρ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续可微;存在 $K_0>\lambda K+K$,以及连续函数 $c_0(t)$,对于任意 $t>0$,存在 $T\geqslant t$,使得对任意 $s\geqslant T$, $\rho(s,t)\leqslant c_0(t)\mathrm{e}^{-K_0s}$ 成立.

注 2　若 $\rho(s,t)=\mathrm{e}^{-\rho_0(s-t)}$,原问题退化为时间一致的最优控制问题, ρ_0 即为贴现率.

定义 2.1　称 $u^*(\cdot)\in U$ 为系统(1)~(3)的均衡控制,如果对任意容许控制 $\tilde{u}(\cdot)\in U$,以及对几乎处处的 $t\in[0,+\infty)$,下式成立:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{J(t,x^*(t);u_{t,\varepsilon,\tilde{u}}(\cdot))-J(t,x^*(t);u^*(\cdot))}{\varepsilon}\leqslant0.$$

记 $H(s,t,x,u,p):[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times\mathbf{R}^n\times U\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为 Hamilton 函数

$$H(s,t,x,u,p)=\langle f(s,x,u),p\rangle+\rho(s,t)g(s,x,u).$$

记$T_{\tilde{u},u^*}:=\{t\in[0,+\infty)\mid t$为下列函数的 Lebesgue 点：$|\tilde{u}(\cdot)|^2,|u^*(\cdot)|^2,f(\cdot,x^*(\cdot),\tilde{u}(\cdot)),f(\cdot,x^*(\cdot),u^*(\cdot)),g(\cdot,x^*(\cdot),\tilde{u}(\cdot))$和$g(\cdot,x^*(\cdot),u^*(\cdot))\}$. 则$[0,+\infty)\backslash T_{\tilde{u},u^*}$是零测集. 令 $Y(\cdot)$是下列方程的解：

$$\begin{cases}\dot{Y}(s)=f_x(s,x^*(s),u^*(s))Y(s),\\ Y(t)=f(t,x^*(t),\tilde{u}(t))-\\ \quad f(t,x^*(t),u^*(t)),\ s\geqslant t\end{cases}\tag{6}$$

3　主要结果

引理 3.1　对任意的 $t\in[0,+\infty),x\in\mathbf{R}^n$，$u(\cdot)\in U,J(t,x;u(\cdot))$有限.

证明　令 $M_u=\int_0^{+\infty}|u(r)|^2\mathrm{d}r$, $\tilde{x}(\cdot)$为控制系统(3)关于 $u(\cdot)$的状态轨线. 对任意的 $s\geqslant t$，由条件(A_1)和 Gronwall 不等式可得

$$|\tilde{x}(s)|\leqslant(|x|+2K(s-t)+KM_u)\mathrm{e}^{K(s-t)}=c_1(s,t,x,u)\mathrm{e}^{Ks}\tag{7}$$

其中$\lim\limits_{s\to t}c_1(s,t,x,u)=|x|+KM_u$. 由条件($A_2$)，对任意 $u(\cdot):[0,+\infty)\to U$,可得

$$\left|\int_t^{+\infty}\rho(s,t)g(s,\tilde{x}(s),u(s))ds\right|<+\infty.$$

引理得证.

定理 3.2　假设条件(A_1)(A_2)成立. 则对任意$\tilde{u}(\cdot),u^*(\cdot)\in\boldsymbol{U},t\in T_{\tilde{u},u^*}$，下列等式成立：

$$J(t,x^*(t);u_{t,\varepsilon,\tilde{u}}(\cdot))-J(t,x^*(t);u^*(\cdot))=\varepsilon\Gamma(t,\tilde{u},u^*)+\varepsilon o(1)\tag{8}$$

其中

$$\Gamma(t,\tilde{u},u^*)=g(t,x^*(t),\tilde{u}(t))-g(t,x^*(t),u^*(t))+\int_t^{+\infty}\rho(s,t)\langle g_x(s,x^*(s),u^*(s)),Y(s)\rangle\mathrm{d}s\tag{9}$$

证明　**步骤 1**　当 $t\leqslant s\leqslant t+\varepsilon$ 时，由条件(A_1)和系统(3)可得

$$|\tilde{x}_\varepsilon(s)-\tilde{x}_\varepsilon(t)|\leqslant 2K(s-t)+K(s-t)c_1(t+\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u})\mathrm{e}^{Ks}+Kr(s,t),$$

其中

$$r(s,t)=\max\left\{\int_t^s|\tilde{u}(r)|^2\mathrm{d}r,\int_t^s|u^*(r)|^2\mathrm{d}r\right\},$$

且$\lim\limits_{s\to t}r(s,t)=0$. 令

$$\tilde{R}(s,t)=\max\{r(s,t),2(s-t)\},$$

$$\tilde{c}_2(\varepsilon,t,x,\tilde{u})=K\cdot\max\{2,c_1(t+\varepsilon,t,x,\tilde{u})\}.$$

我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\tilde{c}_2(\varepsilon,t,x,\tilde{u})=\max\{2K,Kc(x,\tilde{u})\}.$$

从而

$$|\tilde{x}_\varepsilon(s)-\tilde{x}_\varepsilon(t)|\leqslant 2\tilde{R}(t+\varepsilon,t)\tilde{c}_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u})\mathrm{e}^{Ks}\tag{10}$$

同理，我们可以估计$x^*(\cdot)$在$[t,t+\varepsilon]$的模

$$|x^*(s)-x^*(t)|\leqslant 2\tilde{R}(t+\varepsilon,t)\tilde{c}_2(\varepsilon,t,x^*(t),u^*)\mathrm{e}^{Ks}\tag{11}$$

由式(10)(11)，对任意 $t\leqslant s\leqslant t+\varepsilon$，有

$$|\tilde{x}_\varepsilon(s)-x^*(s)|\leqslant\tilde{R}(t+\varepsilon,t)c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks}\tag{12}$$

其中

$$c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)=2(\tilde{c}_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u})+\tilde{c}_2(\varepsilon,t,x^*(t),u^*)).$$

令 $R(\varepsilon):=\tilde{R}(t+\varepsilon,t)$. 则$\lim\limits_{\varepsilon\to0}R(\varepsilon)=0$. 由 $t\in T_{\pi,u^*}$可得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon}=\max\{2,|\tilde{u}(t)|^2,|u^*(t)|^2\}.$$

当 $s>t+\varepsilon$ 时，由条件(A_1)，式(12)及 Gronwall 不等式，对任意 $s>t+\varepsilon$ 有

$$|\tilde{x}_\varepsilon(s)-x^*(s)|\leqslant R(\varepsilon)c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks}\tag{13}$$

由式(12)，(13)，对任意 $s>t$，有

$$|\tilde{x}_\varepsilon(s)-x^*(s)|\leqslant R(\varepsilon)c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks}\tag{14}$$

步骤 2　注意到$\tilde{x}_\varepsilon(t)-x^*(t)=0$，我们有

$$\tilde{x}_\varepsilon(t+\varepsilon)-x^*(t+\varepsilon)=\int_t^{t+\varepsilon}[f(r,\tilde{x}_\varepsilon(r),\tilde{u}(r))-f(r,x^*(r),u^*(r))]\mathrm{d}r.$$

由条件(A_1)和式(14)有

$$\left|\int_t^{t+\varepsilon}[f(r,\tilde{x}_\varepsilon(r),\tilde{u}(r))-f(r,x^*(r),\tilde{u}(r))]dr\right|=o(\varepsilon).$$

因 t 是 $f(\cdot,x^*(\cdot),\tilde{u}(\cdot))$和 $f(\cdot,x^*(\cdot),u^*(\cdot))$的 Lebesgue 点，我们有

$$\tilde{x}_\varepsilon(t+\varepsilon)-x^*(t+\varepsilon)=\varepsilon[f(t,x^*(t),\tilde{u}(t))-f(t,x^*(t),u^*(t))]+o(\varepsilon)\tag{15}$$

步骤 3　令$Y^\varepsilon(\cdot)$为下列方程的解：

$$\begin{cases}\dot{Y}^\varepsilon(s)=f_x(s,x^*(s),u^*(s))Y^\varepsilon(s),\\ Y^\varepsilon(t+\varepsilon)=f(t,x^*(t),\tilde{u}(t))-\\ \quad f(t,x^*(t),u^*(t)),\varepsilon s\geqslant t+\varepsilon\end{cases}\tag{16}$$

令$N_{t,\pi,u^*}:=|f(t,x^*(t),\tilde{u}(t))-f(t,x^*(t),$

$u^*(t))|$. 由 Gronwall 不等式，对任意 $s\geqslant t+\varepsilon$ 有

$$|Y^\varepsilon(s)|\leqslant N_{t,\tilde{u},u^*}\mathrm{e}^{K(s-t-\varepsilon)}=c_3(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks}\tag{17}$$

其中

$$c_3(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)=N_{t,\tilde{u},u^*}\mathrm{e}^{-K(t+\varepsilon)},$$

且

$$\lim_{\varepsilon\to0}c_3(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)=N_{t,\tilde{u},u^*}\mathrm{e}^{-Kt}.$$

记

$$Y_\varepsilon(s):=\frac{\tilde{x}_\varepsilon(s)-x^*(s)}{\varepsilon}.$$

当 $s\geqslant t+\varepsilon$ 时，由式(15)和 Gronwall 不等式得

$$|Y_\varepsilon(s)-Y^\varepsilon(s)|\leqslant c_4(\varepsilon,s,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks},$$

其中

$$c_4(\varepsilon,s,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)=[(s-t-\varepsilon)\bar{\omega}(R(\varepsilon)c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks})\frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon}c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks}+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}]\mathrm{e}^{-K(t+\varepsilon)},$$

且对任意 $s\geqslant t+\varepsilon$，

$$\lim_{\varepsilon\to0}c_4(\varepsilon,s,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)=0.$$

由此可得

$$\tilde{x}_\varepsilon(s)-x^*(s)=\varepsilon Y^\varepsilon(s)+o_1(\varepsilon,s),s\geqslant t+\varepsilon\tag{18}$$

类似推导式(17)的方法，对任意 $s\geqslant t+\varepsilon$ 有

$$|Y(s)|\leqslant c_3(0,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks}\tag{19}$$

因此，对任意 $s\geqslant t+\varepsilon$，由条件(A_1)，式(19)及 Gronwall 不等式，对任意 $s\geqslant t+\varepsilon$ 有

$$|Y(s)-Y^\varepsilon(s)|\leqslant\varepsilon K c_3(0,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks}\tag{20}$$

最终，我们有

$$\tilde{x}_\varepsilon(s)-x^*(s)=\varepsilon Y(s)+o_2(\varepsilon,s),\varepsilon(s\geqslant t+\varepsilon)\tag{21}$$

其中，关于$o_2(\varepsilon,s)$有如下估计：

$$|o_2(\varepsilon,s)|\leqslant\varepsilon\Big[\frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon}c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)+c_3(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{K\varepsilon}\Big]\mathrm{e}^{Ks}=\varepsilon c_6(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{Ks}\tag{22}$$

这里

$$c_6(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)=\frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon}c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)+c_3(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)\mathrm{e}^{K\varepsilon}.$$

步骤 4　计算得出

$$\frac{1}{\varepsilon}(J(t,x^*(t);u_{t,\varepsilon,\tilde{u}}(\cdot))-J(t,x^*(t);u^*(\cdot)))=\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}\rho(s,t)[g(s,\tilde{x}_\varepsilon(s),\tilde{u}(s))-g(s,x^*(s),u^*(s))]\mathrm{d}s+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t+\varepsilon}^{+\infty}\rho(s,t)[g(s,\tilde{x}_\varepsilon(s),u^*(s))-g(s,x^*(s),u^*(s))]\mathrm{d}s=I_1(\varepsilon,t,\tilde{u},u^*)+I_2(\varepsilon,t,\tilde{u},u^*)\tag{23}$$

令 $a(\varepsilon,t):=\max\limits_{0\leqslant h\leqslant\varepsilon}\{\rho(t+h,t)\}$. 由条件($A_1$)，式(7)及式(14)可得

$$\Big|\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}\rho(s,t)[g(s,\tilde{x}_\varepsilon(s),\tilde{u}(s))-g(s,x^*(s),\tilde{u}(s))]\mathrm{d}s\Big|\leqslant\int_t^{t+\varepsilon}\rho(s,t)\,|\langle\int_0^1 g_x(s,x^*(s)+\theta(\tilde{x}_\varepsilon(s)-x^*(s)),\tilde{u}(s))\mathrm{d}\theta,Y_\varepsilon(s)\rangle|\,\mathrm{d}s.$$

因此

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}\rho(s,t)[g(s,\tilde{x}_\varepsilon(s),\tilde{u}(s))-g(s,x^*(s),\tilde{u}(s))]\mathrm{d}s\right|=o(1).$$

由 $t\in T_{\tilde{u},u^*}$ 以及 $\rho(\cdot,\cdot)$连续可微，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0}I_1(\varepsilon,t,\tilde{u},u^*)=g(t,x^*(t),\tilde{u}(t))-g(t,x^*(t),u^*(t))\tag{24}$$

令

$$C(t):=\lim_{\varepsilon\to0}c_6(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*).$$

由之前的计算可知

$$\lim_{\varepsilon\to0}R(\varepsilon)c_2(\varepsilon,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)=0.$$

当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$时，由条件($A_1$)($A_2$)，式(19)及式(21)和(22)有

$$\varepsilon|I_2(\varepsilon,t,\tilde{u},u^*)|\leqslant\int_t^{+\infty}\rho(s,t)K[1+[c_1(s,t,x^*(t),u^*)+1]^\lambda\mathrm{e}^{\lambda Ks}+|u^*(s)|^2]\varepsilon\cdot(c_3(0,t,x^*(t),\tilde{u},u^*)+C(t)+1)\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s<+\infty.$$

由控制收敛定理，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0}I_2(\varepsilon,t,\tilde{u},u^*)=\int_t^{+\infty}\rho(s,t)\langle g_x(s,x^*(s),u^*(s)),Y(s)\rangle\mathrm{d}s\tag{25}$$

由式(24)(25)，定理得证.

推论 3.3　假设条件(A_1)(A_2)成立，且 $u^*(\cdot)\in U$. 则$u^*(\cdot)$是系统(1)～(3)的弱均衡控制当且仅当下列等式成立：

$$H(t,t,x^*(t),u^*(t),\psi(t,t))=$$

$$\max_{v\in U} H(t,t,x^*(t),v,\psi(t,t)),\ \text{a.e.}\ t\in[0,+\infty) \tag{26}$$

其中 $\psi(\cdot,\cdot):[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}^n$ 满足

$$\psi_s(s,t)=-H_x(s,t,x^*(s),u^*(s),\psi(s,t)).$$

证明　记 $D(\cdot)$，$Z(\cdot)$ 分别为下列方程的解：

$$\begin{cases}\dot D(s)=f_x(s,x^*(s),u^*(s))D(s),\ s\geqslant 0,\\ D(0)=I\end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases}\dot Z(s)=-[f_x(s,x^*(s),u^*(s))]^T Z(s),\ s\geqslant 0,\\ Z(0)=I\end{cases} \tag{28}$$

其中 I 为 n 阶单位矩阵，A^T 为矩阵 A 的转置. 对任意 $s\geqslant t$，我们有

$$Y(s)=D(s)D^{-1}(t)Y(t).$$

对任意 $s\geqslant 0$，我们有 $Z^{-1}(s)=D^T(s)$. 记 $M:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}^n$，$\psi:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}^n$. 令

$$M(s,t)=\int_s^{+\infty}\rho(r,t)Z^{-1}(r)\cdot g_x(r,x^*(r),u^*(r))\mathrm{d}r \tag{29}$$

$$\psi(s,t)=Z(s)M(s,t) \tag{30}$$

容易证明：对任意 $s,t\geqslant 0$，$Z(s)$ 和 $M(s,t)$ 是有限的，且 $|Z(s)|\leqslant \mathrm{e}^{Ks}$，$|Z^{-1}(s)|\leqslant \mathrm{e}^{Ks}$. 直接计算可得

$$\psi_s(s,t)=-H_x(s,t,x^*(s),u^*(s),\psi(s,t))$$

$$\begin{aligned}&J(t,x^*(t);u_{t,\varepsilon,\tilde u}(\cdot))-J(t,x^*(t);u^*(\cdot))=\\&\quad \varepsilon[H(t,t,x^*(t),\tilde u(t),\psi(t,t))-\\&\quad H(t,t,x^*(t),u^*(t),\psi(t,t))]+\\&\quad \varepsilon o(1,t),t\in T_{\tilde u,u^*}\end{aligned} \tag{31}$$

容易证明 $u^*(\cdot)$ 是系统(1)～(3)的均衡控制当且仅当对任意 $\tilde u(\cdot)\in U$，存在 $E^{\tilde u}\subseteq[0,+\infty)$ 且 $[0,+\infty)\backslash E^{\tilde u}$ 为零测集使得下式成立：

$$\begin{aligned}&H(t,t,x^*(t),\tilde u(t),\psi(t,t))-\\&\quad H(t,t,x^*(t),u^*(t),\psi(t,t))\leqslant 0,t\in E^{\tilde u}.\end{aligned}$$

因为 U 是可分的，故存在 U 的可数稠子集，记为 Q，我们可以将其表示为 $Q=\{v_1,v_2,v_3,\cdots\}$. 令

$$u_{j,n}(s)=\begin{cases}v_j, & s\in[n,n+1),\\ u^*(s), & s\notin[n,n+1),\end{cases}$$

其中 $n\in\mathbf{N}$，$j\in\mathbf{N}^+$. 这样所构造出的控制依然满足 $u_{j,n}(\cdot)\in U$.

记 $F^{j,n}=E^{u_{j,n}}\cap[n,n+1)$. 则 $[n,n+1)\backslash F^{j,n}$ 为零测集. 故

$$\begin{aligned}&H(t,t,x^*(t),v_j,\psi(t,t))-\\&\quad H(t,t,x^*(t),u^*(t),\psi(t,t))\leqslant 0,t\in F^{j,n}.\end{aligned}$$

记 $F_n=\bigcap_{j\geqslant 1}F^{j,n}$. 则 $[n,n+1]\backslash F_n$ 仍为零测集，且

$$\begin{aligned}&H(t,t,x^*(t),v_j,\psi(t,t))-\\&\quad H(t,t,x^*(t),u^*(t),\psi(t,t))\leqslant 0,\ t\in F_n,\ j\in\mathbf{N}^+.\end{aligned}$$

由条件(A_1)，我们可以推出 $H(s,t,x,u,p)$ 关于 u 是连续的. 由于 Q 是 U 的稠子集，我们有

$$\begin{aligned}&H(t,t,x^*(t),u^*(t),\psi(t,t))=\\&\quad \max_{v\in U}H(t,t,x^*(t),v,\psi(t,t)),\ \text{a.e.}\ t\in[n,n+1)\end{aligned} \tag{32}$$

因 n 是任意的，故式(26)成立.

令 E 为 $[0,+\infty)$ 的子集，使得 $[0,+\infty)\backslash E$ 是零测集. 又令式(26)对任意 $t\in E$ 都成立. 则对任意的 $\tilde u(\cdot)\in U$，我们有

$$\begin{aligned}&H(t,t,x^*(t),\tilde u(t),\psi(t,t))-\\&\quad H(t,t,x^*(t),u^*(t),\psi(t,t))\leqslant 0,\ t\in E.\end{aligned}$$

由定理 3.2 可得

$$\begin{aligned}&J(t,x^*(t);u_{t,\varepsilon,\tilde u}(\cdot))-\\&\quad J(t,x^*(t);u^*(\cdot))\leqslant \varepsilon o(1,t),\\&\quad t\in E\cap T_{\tilde u,u^*}.\end{aligned}$$

注意到此时仍有 $[0,+\infty)\backslash(E\cap T_{\tilde u,u^*})$ 为零测集，最终我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(t,x^*(t);u_{t,\varepsilon,\tilde u}(\cdot))-J(t,x^*(t);u^*(\cdot))}{\varepsilon}\leqslant 0,\ \text{a.e.}\ t\in[0,+\infty).$$

故 $u^*(\cdot)$ 为系统(1)～(3)的均衡控制. 证毕.

条件(A_3)　令 f,g 关于 u 在 $\mathbf{R}^m$ 上连续，f,g 关于 x 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续可微，ρ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续；存在 $K\geqslant 0$，$\lambda\geqslant 0$ 和 $\bar\omega:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 使得对任意 $t\in[0,+\infty)$，$u,u_1,u_2\in U$，$x,x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$，下列成立：

$$|f(t,0,u)|\leqslant K;$$

$$|g(t,x,u)|\leqslant K(1+|x|^{\lambda+1});$$

$$|f(t,x_1,u_1)-f(t,x_2,u_2)|\leqslant K|x_1-x_2|+\bar\omega(|u_1-u_2|);$$

$$|f_x(t,x_1,u_1)-f_x(t,x_2,u_2)|\leqslant \bar\omega(|x_1-x_2|+|u_1-u_2|);$$

$$|g_x(t,x,u)|\leqslant K(1+|x|^{\lambda}).$$

注 3　记 U_1 为所有可测函数 $u(\cdot):[0,+\infty)\to U$ 构成的集合. 根据以上的证明过程，当以条件(A_3)替换条件(A_1)，以 U_1 替换 U 时，引理 3.1，定理 3.2 及推论 3.3 依然成立. 若控制集 U 是无界的，该控制系统不再包含 LQ 问题，但容许控制集的范围可以变得更大. 对于闭环情形，我们仍可采取种方式来证明闭环均衡策略的充要条件.

4　应　用

我们给出该方法在经济学上的一个应用. 考虑如下方程

$$\begin{cases}\dot{x}(s)=-\delta x(s)+u(s),\ \text{a. e. }\ s\in[0,+\infty),\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{33}$$

目标泛函

$$J(t,x(t);u(\cdot))=\int_t^{+\infty}[(\theta\mathrm{e}^{-\rho_1(s-t)}+(1-\theta)\mathrm{e}^{-\rho_2(s-t)})(x(s)-\sigma u(s)^2)]\mathrm{d}s\tag{34}$$

其中$x_0\in\mathbf{R}$,$U=[0,1]$,$0<\delta\leqslant 1$,$0\leqslant\theta\leqslant 1$,$\rho_1\geqslant\rho_2>1$,$0<\sigma\leqslant 1$,这里 $x(s)$代表在 s 时刻的资产总量,x_0代表初始时刻的资产总量,$u(s)$代表在 s 时刻的投资,$\sigma u(s)^2$代表投资过程中产生的花费或者消耗,δ代表资产的损耗系数. 如果 $0<\theta<1$,$\rho_2<\rho_1$,则该控制问题具时间不一致性.

可以验证,条件(A_2)和(A_3)成立,且 $K=1$. 通过计算,我们有

$$x^*(s)=x_0\mathrm{e}^{-\delta s}+\int_0^s u^*(r)\mathrm{e}^{-\delta(s-r)}\mathrm{d}r$$

$$\psi(t,t)=\frac{\theta}{\rho_1+\delta}+\frac{1-\theta}{\rho_2+\delta}>0$$

$$H(t,t,x^*(t),u,\psi(t,t))=x^*(t)(1-\delta\psi(t,t))+(-\sigma u^2+\psi(t,t)u)\tag{35}$$

由推论 3.3,我们仅需找到使$-\sigma u^2+\psi(t,t)u$ 最大的容许控制$u^*(\cdot)$. 记 $a=\psi(t,t)$. 由于此处 $\psi(t,t)$为常数,我们知道当 $0<\frac{a}{2\sigma}<1$ 时

$$u^*(t)=\frac{a}{2\sigma},\ \text{a. e. }\ t\in[0,+\infty).$$

从而此控制即为该模型唯一的均衡控制.

接下来,我们将证明存在一个容许控制,使得在初始时刻此控制比$u^*(\cdot)$更优. 令$u_v(t)\overset{\text{a. e.}}{=}v$,其中 $v\in[0,1]$. 可知$u^*(\cdot)=u_{\frac{a}{2\sigma}}$. 记 $b=\frac{\theta}{\rho_1}+\frac{1-\theta}{\rho_2}$. 可知 $b>a$. 由式(35),我们可以计算目标泛函

$$J(0,x_0;u_v(\cdot))=-b\sigma v^2+\left(\frac{b-a}{\delta}\right)v.$$

当 $0<\frac{b-a}{2b\delta\sigma}<1$ 时,我们可知当 $v^*=\frac{b-a}{2b\delta\sigma}$ 时,$u_{v^*}(\cdot)$会使 $J(0,x_0;u_v(\cdot))$最大化. 然而,通过计算可知,当贴现函数为拟指数型时,$v^*\neq\frac{a}{2\sigma}$. 由于该模型的均衡控制是唯一的,这便意味着即使$u_{v^*}(\cdot)$在初始时刻比$u^*(\cdot)$更优,此控制也不是均衡控制. 实际上,

$$v^*-\frac{a}{2\sigma}=\frac{1}{2b\sigma}\cdot\frac{\theta(1-\theta)(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_1\rho_2(\rho_1+\delta)(\rho_2+\delta)}.$$

当然,在初始时刻,$u_{v^*}(\cdot)$也依然可能不是最优的. 但即使可能找到初始时刻的最优控制,根据上述的计算此最优控制也不是该模型的均衡控制.

参考文献:

[1] Ramsey F P. A mathematical theory of saving [J]. Econ J, 1928, 38: 543.

[2] Adelman M A. Oil producing countries′ discount rate [J]. Resour Energ, 1986, 8: 309.

[3] Strotz R H. Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization [J]. Rev Econo Stud, 1955, 23: 165.

[4] Karp L. Global warming and hyperbolic discounting [J]. J Public Econ, 2005, 89: 261.

[5] Karp L. Non-constant discounting in continuous time [J]. J Econ Theor, 2004, 132: 557.

[6] Karp L, Fuji T. Numerical analysis of a non-constant pure rate of time preference: a model of climate policy [J]. J Environ Econ Manag, 2008, 56: 83.

[7] Krusell P, Smith A. Consumption-savings decisions with quasi-geometric discounting [J]. Econometrica, 2003, 71: 365.

[8] Ekeland I, Lazrak A. The golden rule when preferences are time inconsistent [J]. Math Finan Econ, 2010, 4: 29.

[9] Yong J. Deterministic time-inconsistent optimal control problems, an essentially cooperative approach [J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2012, 28: 1.

[10] Pontryagin L S, Boltyanskii V G, Gamkrelidze R V, *et al*. The mathematical theory of optimal processes [M]. New York: Interscience, 1962.

[11] Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons [J]. Econometrica, 1974, 42: 267.

[12] Michel P. On the transversality condition in infinite horizon optimal problems [J]. Econometrica, 1982, 50: 975.

[13] Aseev S M, Kryazhimskiy A V. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons [J]. SIAM J Control Optim, 2004, 43: 1094.

[14] Aubin J P, Clarke F H. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems [J]. SIAM J Control Optim, 1979, 17: 567.

[15] Ye J J. Nonsmooth maximum principle for infinite-horizon problems [J]. J Optim Theory App, 1993, 76: 485.

[16] Aseev S M, Veliov V M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount [J]. Dyn Contin Discrete Impuls Syst Ser B, 2012, 19: 43.

[17] Tauchnitz N. The Pontryagin maximum principle for nonlinear optimal control problems with infinite horizon [J]. J Optim Theory App, 2015, 167: 27.

[18] Basco V, Frankowska H. Lipschitz continuity of the value function for the infinite horizon optimal control problem under state constraints [C]//Alabau-Boussouira F, Ancona F, Porretta A, *et al*. Trends in conrol theory and partial differential equations. New York: Springer, 2019.

[19] Sagara N. Value functions and transversality conditions for infinite-horizon optimal control problems [J]. Set-Valued Var Anal, 2010, 18: 1.

[20] Cannarsa P, Frankowska H. Value function, relaxation, and transversality conditions in infinite horizon optimal control [J]. J Math Anal Appl, 2018, 457: 1188.

引用本文格式：

中　文：耿晓琦，张志雄. 一类无穷时区上的时间不一致最优控制问题的均衡控制[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：031001.

英　文：Geng X Q, Zhang Z X. Equilibrium control of a class of time-inconsistent optimal control problems with infinite horizon [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 031001.