对流-扩散-反应方程界面问题的扩展杂交间断有限元

王慧媛[1]，陈豫眉[2]
(1. 四川大学数学学院，成都 610064；2. 西华师范大学公共数学学院，南充 637009)

摘　要：本文针对 2 维和 3 维对流-扩散-反应方程的界面问题提出了一种基于非贴体网格的扩展杂交间断有限元方法. 该方法在单元的内部分别用分片 $k(k\geqslant 1)$和 $m(m=k,k-1)$次多项式逼近标量函数及其梯度，在单元边界上用 k 次多项式逼近标量函数的迹，在界面上则用界面单元内部的 k 次多项式在界面上的限制去逼近标量函数的迹. 对于弱问题，本文利用 Lax-Milgram 定理证明其解的存在唯一性. 对于离散格式，本文给出了其解的存在唯一性以及能量范数下的最优误差估计.

关键词：对流-扩散-反应方程；界面问题；非贴体网格；扩展杂交间断有限元
中图分类号：O241.82　**文献标识码**：A　DOI：10.19907/j.0490-6756.2023.021003

An extended HDG finite element for convection-diffusion-reaction equation interface problems

WANG Hui-Yuan[1], *CHEN Yu-Mei*[2]
(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. College of Mathematics Education, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: This paper proposes an extended hybridizable discontinuous Galerkin (HDG) finite element for 2D and 3D convection-diffusion-reaction equation interface problems on body-unfitted meshes. This finite element uses piecewise polynomials of degrees $k(k\geqslant 1)$ and $m(m=k,k-1)$ to approximate the scalar function and its gradient respectively in the interior of elements, piecewise polynomials of degrees k to approximate the traces of the scalar function on the inter-element boundaries inside the sub-domains and constraints on the interface of piecewise polynomials of degrees k inside interface elements to approximate the traces of the scalar function on the interface. The existence and uniqueness of weak solution for the weak problem and discrete solution for the discrete scheme are proved respectively. Lax-Milgram theorem is used for the weak problem. The optimal error estimation is derived in the energy norm for the discrete scheme.

Keywords: Convection-diffusion-reaction equation; Interface problem; Body-unfitted meshes; Extended HDG method
(2010 MSC 65M60)

收稿日期：2022-04-07
基金项目：国家自然科学基金(11971094)
作者简介：王慧媛 (1997－)，女，硕士研究生，主要研究方向为偏微分方程数值解. E-mail：3311484766@qq.com.
通讯作者：陈豫眉. E-mail：xhshuxue@163.com

1 引言

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^d(d=2,3)$ 是多边形或多面体区域，被分段/分片光滑界面 Γ 划分为两个子区域 $\Omega_i(i=1,2)$，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界. 考虑如下对流-扩散-反应方程界面问题：求标量函数 $u(x)$，满足

$$\begin{cases}-\varepsilon\Delta u+\nabla\cdot(bu)+cu=f, x\in \Omega_1\cup\Omega_2,\\ u=g, x\in\partial\Omega,\\ [\![u]\!]=0, [\![\varepsilon\nabla u\cdot n]\!]=g_N^\Gamma, x\in\Gamma\end{cases}\tag{1}$$

其中，$f\in L^2(\Omega)$；$g\in H^{12}(\partial\Omega)$；$g_N^\Gamma\in L^2(\Gamma)$. $\varepsilon>0$ 为分片常数，即 $\varepsilon|_{\Omega_i}=\varepsilon_i$，$b=b(x)$ 和 $c=c(x)$ 仅在界面上间断. $b(x)|_{\Omega_i}\in W^{1,\infty}(\Omega_i)$，$c(x)|_{\Omega_i}\in C^0(\Omega_i)$，$i=1,2$，$n$ 为沿着 Γ 指向 Ω_2 的单位法向量；$[\![w]\!]$ 表示函数 w 在界面上的跳量，即

$$[\![w]\!]:=(w|_{\Omega_1})|_\Gamma-(w|_{\Omega_2})|_\Gamma.$$

对流-扩散-反应方程在环境科学、化学、流体力学和生物学等诸多领域中都有重要应用[1-4]. 例如，该方程可以描述土壤吸附污染物、化学物质反应中物质在对流、扩散、反应三个过程影响下的浓度变化. 特别地，当所涉及的介质或材料具有不均匀性时，我们往往需要处理带间断系数的界面问题.

由于系数的间断性，界面问题的解的全局正则性通常非常低，这导致使用标准有限元逼近的精度降低[5,6]. 目前主要有两类方法来解决这个困难，即贴体有限元法[7-10]和非贴体有限元法. 扩展/广义有限元法就是一类有广泛应用的非贴体有限元法[11-15]. 其基本思想是对标准的有限元空间进行某种修正，以更好地逼近不光滑的解，如增加描述解的局部奇性特征的基函数. 这些额外的基函数被称为富集函数，取不同的富集函数就得到不同的扩展/广义有限元法. 文献[16]结合 Nitsche 方法通过在界面单元上引入几何相关的通量平均值提出了一种扩展有限元方法，其采用切割(cut)线性多项式富集函数去丰富相应的逼近函数空间. 文献[17] 针对椭圆界面问题提出了一种任意阶的扩展杂交间断 Galerkin 有限元法，该方法采用切割(cut)多项式作为富集函数. 此外该方法也被应用于求解弹性界面问题[18].

对于对流-扩散-反应方程的相关界面问题，有限元方法方面的研究并不多. 其中，文献[19]和[20]采用文献[16]中提出的基于 Nitsche 方法的扩展有限元法求解两相流中描述溶解物质传输的对流-扩散界面问题，文献[21]则针对具有间断、各向异性和半正定扩散系数矩阵的对流-扩散-反应问题，提出了一种基于贴体网格的间断 Galerkin 有限元法.

杂交间断有限元方法(Hybridizable Discontinuous Galerkin, HDG)是近十年发展起来的求解偏微分方程的数值方法[22]，在对流-扩散(-反应)方程的求解中已有很多应用. 文献[23]针对对流-扩散-反应方程提出了一种 HDG 方法，该方法采用相同次数的多项式去逼近标量函数、通量及标量函数的迹. 文献[24]基于一般的多面体网格，针对对流-扩散方程分析了一种 HDG 方法，该方法采用 k 次多项式去逼近标量函数，用 $k-1$ 次多项式逼近梯度和标量函数的迹. 文献[25]则针对对流-扩散-反应方程分析了一种弱 Galerkin 有限元法，给出了等价的 HDG 格式，该方法采用 k 次多项式去逼近标量函数和它的迹，用 $m(m=k,k-1)$次多项式去逼近梯度.

本文针对对流-扩散-反应方程的一种界面问题提出一类任意阶的扩展杂交间断有限元方法，并进行了误差分析. 为方便后面的分析，对 b 和 c 做如下假设.

假设 1.1　设 $\bar\sigma=c+\frac{1}{2}\nabla\cdot b$ 有一个正下界，即 $\sigma_0:=\inf_{x\in\Omega_1\cup\Omega_2}\bar\sigma>0$.

假设 1.2　设 $b(x)$ 跨界面 Γ 时的法向分量 $b(x)\cdot n$ 是连续的.

本文结构安排如下. 第 2 节是预备知识. 第 3 节给出弱解的存在唯一性. 第 4 节引入扩展杂交间断有限元格式，并给出离散解的存在唯一性. 第 5 节给出误差估计. 第 6 节总结本文的结果.

2 预备知识

设 $(\cdot,\cdot)_{m,\Lambda}$，$\|\cdot\|_{m,\Lambda}$ 和 $|\cdot|_{m,\Lambda}$ 分别表示有界区域 $\Lambda\subset\mathbf{R}^s(s=d,d-1)$ 上 m 阶 Sobolev 空间 $H^m(\Lambda)$ 的内积、范数和半范数. 当 $\Lambda=\Omega$ 时，略去下标 m,Λ. 当 $m=0$ 时，记 $(\cdot,\cdot)_\Lambda=(\cdot,\cdot)_{0,\Lambda}$，$\|\cdot\|_\Lambda:=\|\cdot\|_{0,\Lambda}$. 对任意有界区域 $\Theta\subset\mathbf{R}^{d-1}$，用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Theta$ 替代 $(\cdot,\cdot)_\Theta$. $\|\cdot\|_{m,\infty,\Lambda}$ 和 $|\cdot|_{m,\infty,\Lambda}$ 分别为 m 阶 Sobolev 空间 $W^{m,\infty}(\Lambda)$ 的范数和半范数. 记

$$H_g^1(\Omega):=\{v\in H^1(\Omega): v|_{\partial\Omega}=g\},$$

$$H^m(\Omega_1\cup\Omega_2):=\{v\in L^2(\Omega): v|_{\Omega_i}\in H^m(\Omega_i), i=1,2\},$$

$$\|\cdot\|_{m,\Omega_1\cup\Omega_2}:=\sum_{i=1}^{2}\|\cdot\|_{m,\Omega_i},$$

$$|\cdot|_{m,\Omega_1\cup\Omega_2}:=\sum_{i=1}^{2}|\cdot|_{m,\Omega_i},$$

$$W^{m,\infty}(\Omega_1\cup\Omega_2):=\{v\in L^{\infty}(\Omega):v|_{\Omega_i}\in W^{m,\infty}(\Omega_i),i=1,2\},$$

$$\|\cdot\|_{m,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2}:=\max_{i=1,2}\|\cdot\|_{m,\infty,\Omega_i},$$

$$|\cdot|_{m,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2}:=\max_{i=1,2}|\cdot|_{m,\infty,\Omega_i}.$$

设 $T_h=\cup K$ 为 Ω 的非贴体的正则(shape-regular)三角剖分. 与界面 Γ 相交的所有单元的集合定义为$T_h^{\Gamma}:=\{K\in T_h:K\cap\Gamma\neq\varnothing\}$. 我们称任意的 $K\in T_h^{\Gamma}$为界面单元,并记$\Gamma_K:=K\cap\Gamma$ 为 Γ 落在 K 中的部分,$K_i=K\cap\Omega_i$为K 落在Ω_i中的部分. 我们对界面 Γ 和T_h做如下两个标准假设.

假设 2.1　对任意的 $K\in T_h^{\Gamma}$以及与 Γ 相交的任意边/面 $F\in\partial K$,设$F_{\Gamma}:=\Gamma\cap F$ 是单连通的.

假设 2.2[6,10]　对任意的 $K\in T_h^{\Gamma}$,设 Γ_K 充分光滑,使得Γ_K上任意不相同两点 x,y 处指向Ω_2的单位法向满足$|n(x)-n(y)|\leqslant\gamma h_K$,其中 $\gamma\geqslant 0$.

设ε_h为 T_h中所有单元的边/面的集合,ε_h^{Γ}为界面 Γ 关于 T_h的剖分,即$\varepsilon_h^{\Gamma}=\{F:F=\Gamma_K$,或 $F=\Gamma\cap\partial K$,当 $\Gamma\cap\partial K$ 为 K 的边/面时,$\forall K\in T_h\}$. 记$\varepsilon_h^{*}:=\varepsilon_h\backslash\varepsilon_h^{\Gamma}$. 对任意的$K\in T_h$和 $F\in\varepsilon_h^{*}\cup\varepsilon_h^{\Gamma}$,$h_K$和 h_F 分别表示 K 和 F 的直径,$h:=\max_{K\in T_h}h_K$为网格T_h的尺寸. n_K表示沿着 ∂K 的单位外法向,∇_h和 $\nabla_h\cdot$ 分别为T_h上分片定义的梯度和散度算子.

对任意整数 $r\geqslant 0$, $K\in T_h$和 $F\in\varepsilon_h^{*}\cup\varepsilon_h^{\Gamma}$,用

$$\Pi_r^b:L^2(D)\to P_r(D)\text{和}\Pi_r:L^2(\widetilde{D})\to P_r(\widetilde{D})$$

分别表示 $D=F\cap\Omega_i$和 $\widetilde{D}=K\cap\Omega_i$上的标准$L^2$正交投影算子,它们的向量形式分别记为 Π_r^b和 Π_r. 本文用 $a\lesssim b$ 表示 $a\leqslant\widetilde{C}b$,其中 $\widetilde{C}$是与h,h_K, h_F以及界面相对于网格的位置均无关的正常数.

3　弱解的存在唯一性

本小节给出问题(1)弱解的存在唯一性.

定理 3.1(迹定理)[26]　映射 $v\to\gamma_0 v:H^1(\Omega_i)\to H^{1/2}(\partial\Omega_i)$,$i=1,2$ 是连续线性满射,其中 γ_0称为边界值算子或迹算子,$\gamma_0 v$ 表示 v 在$\partial\Omega_i$上的值.

首先,我们对非齐次 Dirichlet 边界问题(1)进行齐次化处理,并给出齐次问题的弱形式. 由迹定理知,存在$u_g\in H^1(\Omega)$ 使得 $u_g|_{\partial\Omega}=g$. 令 $w=u-u_g$. 则问题(1)转化为:求标量函数 $w(x)$满足

$$\begin{cases}-\varepsilon\Delta w+\nabla\cdot(bw)+cw=F, x\in\Omega_1\cup\Omega_2,\\ w=0,\ x\in\partial\Omega,\\ [\![w]\!]=0,[\![\varepsilon\nabla w\cdot n]\!]=G_N^{\Gamma},\ x\in\Gamma\end{cases}\tag{2}$$

其中

$$F:=f-(-\varepsilon\Delta u_g+\nabla\cdot(bu_g)+cu_g),$$

$$G_N^{\Gamma}:=g_N^{\Gamma}-[\![\varepsilon\nabla u_g\cdot n]\!].$$

在方程(2)中的第一个方程两边乘以任意函数 $v\in H_0^1(\Omega)$ 并在 Ω 上积分,有

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}(-\varepsilon\Delta w)v+\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\nabla\cdot(bw)v+\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}cwv=\int_{\Omega}fv-\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}(-\varepsilon\Delta u_g)v-\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\nabla\cdot(bu_g)v-\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}cu_g v\tag{3}$$

对该方程两边应用 Green 公式,再由 $v|_{\partial\Omega}=0$ 以及假设 1.2 和方程(2)中的跳跃条件可将方程(3)重写为

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\varepsilon\nabla w\cdot\nabla v+\frac{1}{2}\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}(vb\cdot\nabla w-wb\cdot\nabla v)+\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left(c+\frac{1}{2}\nabla\cdot b\right)wv=\int_{\Omega}fv-\int_{\Gamma}g_N^{\Gamma}v-\frac{1}{2}\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}(vb\cdot\nabla u_g-u_g b\cdot\nabla v)-\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\varepsilon\nabla u_g\cdot\nabla v-\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left(c+\frac{1}{2}\nabla\cdot b\right)u_g v.$$

记

$$a(w,v):=\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\varepsilon\nabla w\cdot\nabla v,$$

$$b(w,v):=\frac{1}{2}\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}(vb\cdot\nabla w-wb\cdot\nabla v),$$

$$c(w,v):=\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left(c+\frac{1}{2}\nabla\cdot b\right)wv,$$

$$A(w,v):=a(w,v)+b(w,v)+c(w,v),$$

$$(l,v):=\int_{\Omega}fv-\int_{\Gamma}g_N^{\Gamma}v-A(u_g,v).$$

则方程(2)的弱问题为:求 $w\in H_0^1(\Omega)$,使得

$$A(w,v)=(l,v),\forall v\in H_0^1(\Omega)\tag{4}$$

定理 3.2　弱问题(4)存在唯一解.

证明　这里我们用 Lax-Milgram 定理,需要去证明双线性型的连续性和强制性.

首先我们证明连续性. 对任意的 $w\in H_0^1(\Omega)$, $v\in H_0^1(\Omega)$,由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$a(w,v)\leqslant\varepsilon_{max}|w|_1|v|_1,$$

$$b(w,v)\leqslant\frac{1}{2}\|b\|_{0,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2}(\|v\||w|_1+$$

$\|w\| |v|_1)$,

$$c(w,v)\leqslant\left(\|c\|_{0,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2}+\frac{1}{2}|b|_{1,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2}\right)\|w\|\ \|v\|.$$

从而

$$A(w,v)\leqslant(\varepsilon_{\max}+\|c\|_{0,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2}+\frac{1}{2}\|b\|_{1,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2})\|w\|_1\|v\|_1.$$

我们再证明强制性. 对任意 $v\in H_0^1(\Omega)$, 由 Poincaré 不等式得

$$a(v,v)\geqslant\varepsilon_{\min}|v|_1^2\geqslant\varepsilon_{\min}C_1\|v\|_1^2,$$

$$b(v,v)=0, c(v,v)\geqslant\sigma_0\|v\|^2\geqslant 0.$$

从而有 $A(v,v)\geqslant\varepsilon_{\min}C_1\|v\|_1^2$, 其中 $\varepsilon_{\min}:=\min\limits_{i=1,2}\varepsilon_i$, $\varepsilon_{\max}:=\max\limits_{i=1,2}\varepsilon_i$, $C_1=\text{const}>0$ 与 v 无关. 双线性型 $A(w,v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上是连续且强制的, l 显然为 $H_0^1(\Omega)$ 上的连续线性泛函, 由 Lax-Milgram 定理可知弱问题 (4) 存在唯一解.

由问题 (2) 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中存在唯一的弱解易知原问题(1) 在 $H_g^1(\Omega)$ 中存在唯一的弱解.

4 扩展杂交间断有限元格式

本文的杂交间断有限元方法基于问题(1)的一阶形式:

$$\begin{cases} p=-\varepsilon\nabla u,\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2, \\ \nabla\cdot(p+bu)+cu=f,\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2, \\ u=g, x\in\partial\Omega, \\ [\![u]\!]=0, [\![p\cdot n]\!]=g_N^\Gamma, x\in\Gamma \end{cases}\tag{5}$$

设 χ_i 为子区域 Ω_i 的特征函数. 记

$$\oplus\chi_i P_r(K):=\chi_1P_r(K)+\chi_2P_r(K).$$

设 $k\geqslant 1$, $m=k-1$(或 k), 有限元空间定义如下:

$$Q_h:=\{q\in(L^2(\Omega))^d: \forall K\in T_h, q|_K\in(P_m(K))^d, 若\ K\cap\Gamma=\varnothing; q|_K\in\oplus\chi_i(P_m(K))^d, 若\ K\cap\Gamma\neq\varnothing\},$$

$$V_h:=\{v\in L^2(\Omega): \forall K\in T_h, v|_K\in P_k(K), 若\ K\cap\Gamma=\varnothing; v|_K\in\oplus\chi_iP_k(K), 若\ K\cap\Gamma\neq\varnothing\},$$

$$\widehat{V}_h:=\{\widehat{v}\in L^2(\varepsilon_h^*): \forall F\in\varepsilon_h^*, \widehat{v}|_F\in P_k(F), 若\ F\cap\Gamma=\varnothing; \widehat{v}|_F\in\oplus\chi_iP_k(F), 若\ F\cap\Gamma\neq\varnothing\},$$

$$\widehat{V}_h(g):=\{\widehat{v}\in\widehat{V}_h: \forall F\in\varepsilon_h^*\ 且\ F\subset\partial\Omega, \widehat{v}|_{F\cap\bar{\Omega}_i}=\Pi_k^b(g|_{F\cap\bar{\Omega}_i})\},$$

$$\widetilde{V}_h:=\{\widetilde{v}=\{\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_2\}: \forall F\in\varepsilon_h^\Gamma, \widetilde{v}_i:=\widetilde{v}|_{F\cap\bar{\Omega}_i}\in P_k(K)|_F, 其中\ K\in T_h 使得\ F\subset\bar{K}, i=1,2\},$$

$$\widetilde{V}_h(0):=\{\widetilde{v}\in\widetilde{V}_h: [\![\widetilde{v}]\!]_F=0, \forall F\in\varepsilon_h^\Gamma\}.$$

在给出离散格式之前, 我们首先给出一些积分的定义. 记

$$(\cdot,\cdot)_{T_h}:=\sum_{K\in T_h}(\cdot,\cdot)_K,$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}:=\sum_{K\in T_h}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial K\backslash\varepsilon_h^\Gamma}.$$

对标量函数 u,v 和向量函数 q, 定义

$$\langle u,v\rangle_{*,\Gamma}:=\sum_{F\in\varepsilon_h^\Gamma}\left(\int_{F\cap\bar{\Omega}_1}u_1v_1+\int_{F\cap\bar{\Omega}_2}u_2v_2\right),$$

$$\langle q\cdot n,v\rangle_{*,\Gamma}:=\sum_{F\in\varepsilon_h^\Gamma}\left(\int_{F\cap\bar{\Omega}_1}v_1q_1\cdot n_1+\int_{F\cap\bar{\Omega}_2}v_2q_2\cdot n_2\right),$$

其中 $u_i=u|_{F\cap\bar{\Omega}_i}$, $v_i=v|_{F\cap\bar{\Omega}_i}$, $q_i=q|_{F\cap\bar{\Omega}_i}$, n_i 表示沿着 Γ 从 Ω_i 指向 Ω_j 的单位法向, $i,j=1,2$ 且 $i\neq j$.

下面我们给出问题的离散格式: 求 $(p_h,u_h,\widehat{u}_h,\widetilde{u}_h)\in Q_h\times V_h\times\widehat{V}_h(g)\times\widetilde{V}_h(0)$ 使得对任意的 $(q,v,\widehat{\mu},\widetilde{\mu})\in Q_h\times V_h\times\widehat{V}_h(0)\times\widetilde{V}_h(0)$ 有

$$(\varepsilon^{-1}p_h,q)_{T_h}-(u_h,\nabla_h\cdot q)_{T_h}+\langle\widehat{u}_h,q\cdot n\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\langle\widetilde{u}_h,q\cdot n\rangle_{*,\Gamma}=0\tag{6a}$$

$$(\nabla_h\cdot(p_h+bu_h),v)_{T_h}+(cu_h,v)_{T_h}+\langle\tau(u_h-\widehat{u}_h),v\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\langle\eta(u_h-\widetilde{u}_h),v\rangle_{*,\Gamma}=(f,v)\tag{6b}$$

$$\langle(p_h+bu_h)\cdot n,\widehat{\mu}\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\langle\tau(u_h-\widehat{u}_h),\widehat{\mu}\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}=0\tag{6c}$$

$$\langle(p_h+bu_h)\cdot n,\widetilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma}+\langle\eta(u_h-\widetilde{u}_h),\widetilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma}=\langle g_N^\Gamma,\widetilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma}\tag{6d}$$

其中 τ 和 η 为稳定化参数, 定义如下: 对 $F\in\varepsilon_h^*\cup\varepsilon_h^\Gamma$, $K\in T_h$, $i=1,2$, 定义

$$\tau|_F=|b\cdot n_F|+\varepsilon h_F^{-1}, 若\ F\subset\partial K\backslash\varepsilon_h^\Gamma 且\ F\cap\Omega_i\neq\varnothing\tag{7}$$

$$\eta|_{F\cap\bar{\Omega}_i}=|b\cdot n_F|+\varepsilon h_F^{-1}, 若\ F=\Gamma_K 或\ F\subset\partial(K\cap\Omega_i)\tag{8}$$

定理 4.1 离散格式 (6a)~(6d) 存在唯一解.

证明　因为问题(6a)~(6d) 是一个线性系统, 且未知数与方程个数相等, 所以只需证明当 $f=g=g_N^\Gamma=0$ 时方程组只有零解. 在式(6a)~(6d) 中取 $(q,v,\widehat{\mu},\widetilde{\mu})=(p_h,u_h,-\widehat{u}_h,-\widetilde{u}_h)$, 把这些方程相加得到

$$(\varepsilon^{-1}p_h,p_h)_{T_h}+(cu_h,u_h)_{T_h}+\langle\tau(u_h-\widehat{u}_h),u_h-\widehat{u}_h\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+(\nabla_h\varepsilon(bu_h),u_h)_{T_h}+\langle\eta(u_h-\widetilde{u}_h),u_h-\widetilde{u}_h\rangle_{*,\Gamma}-$$

$$\langle b\cdot n u_h,\widehat{u}_h\rangle_{\partial T_h\setminus\varepsilon_h^\Gamma}-\langle b\cdot n u_h,\widetilde{u}_h\rangle_{*,\Gamma}=0 \tag{9}$$

进一步,应用 Green 公式得

$$(\nabla_h\cdot(bu_h),u_h)_{T_h}=\frac{1}{2}(\nabla_h\cdot(bu_h),u_h)_{T_h}+\frac{1}{2}((\nabla\cdot b)u_h,u_h)_{T_h}+\frac{1}{2}((\nabla_h u_h,bu_h)_{T_h}=\frac{1}{2}((\nabla\cdot b)u_h,u_h)_{T_h}+\frac{1}{2}\langle b\cdot n u_h,u_h\rangle_{\partial T_h\setminus\varepsilon_h^\Gamma}+\frac{1}{2}\langle b\cdot n u_h,u_h\rangle_{*,\Gamma}.$$

因 $\langle b\cdot n\widehat{u}_h,\widehat{u}_h\rangle_{\partial T_h\setminus\varepsilon_h^\Gamma}=0$ 和 $\langle b\cdot n\widetilde{u}_h,\widetilde{u}_h\rangle_{*,\Gamma}=0$, 方程 (9) 可重写为

$$(\varepsilon^{-1}p_h,p_h)_{T_h}+\left((c+\frac{1}{2}\nabla\cdot b)u_h,u_h\right)_{T_h}+\langle\left(\tau+\frac{1}{2}b\cdot n\right)(u_h-\widehat{u}_h),u_h-\widehat{u}_h\rangle_{\partial T_h\setminus\varepsilon_h^\Gamma}+\langle\left(\eta+\frac{1}{2}b\cdot n\right)(u_h-\widetilde{u}_h),u_h-\widetilde{u}_h\rangle_{*,\Gamma}=0.$$

再由假设 1.1 和 (7),(8) 式易得

$$\begin{cases}p_h=0,\text{在}T_h\text{上},\\ u_h=0,\text{在}T_h\text{上},\\ u_h-\widehat{u}_h=0,\text{在}\partial T_h\setminus\varepsilon_h^\Gamma\text{上},\\ \{\{(u_h-\widetilde{u}_h)^2\}\}=0,\text{在}\Gamma\text{上},\end{cases}$$

其中 $\{\{\cdot\}\}$ 的定义为

$$\{\{w\}\}=w_1+w_2,w_i=w|_{\Gamma\cap\Omega_i},i=1,2.$$

因此$p_h=0,u_h=\widehat{u}_h=0,\widetilde{u}_h=\{0,0\}$,定理得证.

5　误差估计

引理 5.1[15]　存在一个仅依赖于界面 Γ 和网格 T_h 的正则性(shape-regularity)的正整数h_0,使得对任意的 $h\in(0,h_0]$ 和 $K\in T_h^\Gamma$,下面的估计对 $i=1$ 或 $i=2$ 成立:

$$\|v\|_{0,\Gamma_K}\lesssim h_K^{-1/2}\|v\|_{0,K\cap\Omega_i}+\|v\|_{0,K\cap\Omega_i}^{1/2}\|\nabla v\|_{0,K\cap\Omega_i}^{1/2},\forall v\in H^1(K\cap\Omega_i) \tag{10}$$

$$\|v_h\|_{0,\Gamma_K}\lesssim h_K^{-\frac{1}{2}}\|v_h\|_{0,K\cap\Omega_i},\forall v_h\in P_r(K) \tag{11}$$

对于 $i=1,2$,令$\widetilde{\Omega}_i:=\{\cup\bar{K}:K\cap\Omega_i\neq\varnothing,K\in T_h\}$.

引理 5.2[27]　设 $s\geqslant1$ 为整数.则存在延拓算子$E_i:H^s(\Omega_i)\rightarrow H^s(\widetilde{\Omega}_i)$,使得对任意的 $w\in H^s(\Omega_i)$有

$$(E_iw)|_{\Omega_i}=w\text{ 且 }\|E_iw\|_{H^s(\widetilde{\Omega}_i)}\lesssim\|w\|_{H^s(\Omega_i)}.$$

对任意的 $v\in H^s(\Omega_1\cup\Omega_2)$,令 $\widetilde{v}_i:=E_i(v|_{\Omega_i})$.定义投影算子 Q_rv 和 Q_r^bv 如下:

$$(Q_rv)|_K:=\chi_1\Pi_r(\widetilde{v}_1|_K)+\chi_2\Pi_r(\widetilde{v}_2|_K),\quad\forall K\in T_h \tag{12}$$

$$(Q_r^bv)|_F:=\chi_1\Pi_r^b(\widetilde{v}_1|_F)+\chi_2\Pi_r^b(\widetilde{v}_2|_F),\quad\forall F\in\varepsilon_h^* \tag{13}$$

其中整数 $r\geqslant0$. Q_r 和 Q_r^b 的向量形式分别记为$\boldsymbol{Q}_r$ 和 $\boldsymbol{Q}_r^b$.

基于引理 5.1 和标准 L^2 投影的性质,以下结论成立.

引理 5.3[18]　设 s 是一个整数,且 $1\leqslant s\leqslant r+1$. 则对任意的 $K\in T_h$, $h\in(0,h_0]$和 $v\in H^s(\Omega_1\cup\Omega_2)$,成立

$$\sum_{K\in T_h}\|v-Q_rv\|_{0,K}^2+h^2\sum_{K\in T_h}\|v-Q_rv\|_{1,K}^2\lesssim h^{2s}\|v\|_{s,\Omega_1\cup\Omega_2}^2,$$

$$\sum_{K\in T_h}\|v-Q_rv\|_{0,\partial K}^2+\sum_{K\in T_h}\|v-Q_rv\|_{0,\Gamma_K}^2\lesssim h^{2s-1}\|v\|_{s,\Omega_1\cup\Omega_2}^2,$$

$$\sum_{K\in T_h}\|v-Q_r^bv\|_{0,\partial K}^2\lesssim h^{2s-1}\|v\|_{s,\Omega_1\cup\Omega_2}^2,$$

其中对界面单元 $K\in T_h^\Gamma$,记号 $\|\cdot\|_{s,K}$ 和 $\|\cdot\|_{0,\partial K}$分别定义为

$$\|\cdot\|_{s,K}^2=\sum_{i=1}^2\|\cdot\|_{s,K\cap\Omega_i}^2\text{ 和 }\|\cdot\|_{0,\partial K}^2=\sum_{i=1}^2\|\cdot\|_{0,\partial K\cap\bar{\Omega}_i}^2.$$

接下来我们进行推导误差估计.设 (p,u) 为问题 (5) 的解,$(p_h,u_h,\widehat{u}_h,\widetilde{u}_h)$为问题 (6a)~(6d) 的解.定义

$$e_h^p:=Q_mp-p_h,\ e_h^u:=Q_ku-u_h,e_h^{\widehat{u}}:=Q_k^bu-\widehat{u}_h,\ e_h^{\widetilde{u}}:=Q_k^\Gamma u-\widetilde{u}_h \tag{14}$$

这里,对任意的 $F\in\varepsilon_h^\Gamma$,

$$(Q_k^\Gamma u)|_F:=\begin{cases}\Pi_r^b(u|_{F\cap\bar{\Omega}_1}),\Pi_r^b(u|_{F\cap\bar{\Omega}_2})\},\text{若 }F\text{ 是直线段或平面},\\ \{u_F^*,u_F^*\},\text{若 }F\text{ 是直线段或平面},\end{cases}$$

其中 $v=\{v_1,v_2\}$表示 F 上的双值函数,即$v_i:=v|_{F\cap\bar{\Omega}_i}$,且

$$u_F^* := \frac{1}{2}(\Pi_k(\tilde{u}_1|_K)|_F + \Pi_k(\tilde{u}_2|_K)|_F),$$

$$\tilde{u}_i := E_i(u|_{\Omega_i}), i=1,2.$$

下面我们给出误差方程.

引理 5.4　对任意的$(q,v,\hat{\mu},\tilde{\mu}) \in Q_h \times V_h \times \hat{V}_h(0) \times \tilde{V}_h(0)$,成立

$$(\varepsilon^{-1}e_h^p, q)_{T_h} - (e_h^u, \nabla_h \cdot q)_{T_h} + \langle e_h^{\hat{u}}, q\cdot n\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle e_h^{\tilde{u}}, q\cdot n\rangle_{*,\Gamma} = L_1(q) \tag{15a}$$

$$(\nabla_h \cdot (e_h^p + b e_h^u), v)_{T_h} + (c e_h^u, v)_{T_h} + \langle \tau(e_h^u - e_h^{\hat{u}}), v\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle \eta(e_h^u - e_h^{\tilde{u}}), v\rangle_{*,\Gamma} = \sum_{i=2}^{4} L_i(v) \tag{15b}$$

$$\langle (e_h^p + b e_h^u)\cdot n, \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle \tau(e_h^u - e_h^{\hat{u}}), \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} = L_2(\hat{\mu}) \tag{15c}$$

$$\langle (e_h^p + b e_h^u)\cdot n, \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma} + \langle \eta(e_h^u - e_h^{\tilde{u}}), \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma} = L_3(\tilde{\mu}) \tag{15d}$$

这里

$$L_1(q) := (\varepsilon^{-1}(Q_m p - p), q)_{T_h^\Gamma} - (Q_k u - u, \nabla_h \cdot q)_{T_h^\Gamma} + \langle Q_k^b u - u, q\cdot n\rangle_{\partial T_h^\Gamma \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle Q_k^\Gamma u - u, q\cdot n\rangle_{*,\Gamma},$$

$$L_2(v) := \langle (Q_m p - p)\cdot n + b\cdot n(Q_k u - u), v\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle \tau(Q_k u - Q_k^b u), v\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma},$$

$$L_3(v) := \langle (Q_m p - p)\cdot n + b\cdot n(Q_k u - u), v\rangle_{*,\Gamma} + \langle \eta(Q_k u - Q_k^\Gamma u), v\rangle_{*,\Gamma},$$

$$L_4(v) := -(Q_m p - p, \nabla_h v)_{T_h^\Gamma} - (b(Q_k u - u), \nabla_h v)_{T_h} + (c(Q_k u - u), v)_{T_h},$$

其中

$$(\cdot,\cdot)_{T_h^\Gamma} = \sum_{K\in T_h^\Gamma} (\cdot,\cdot)_K,$$

$$\langle \cdot,\cdot\rangle_{\partial T_h^\Gamma \backslash \varepsilon_h^\Gamma} = \sum_{K\in T_h^\Gamma} (\cdot,\cdot)_{\partial K \backslash \varepsilon_h^\Gamma}.$$

证明　由投影算子Q_m, Q_k, Q_k^b和Q_k^Γ的定义和性质可知,对任意的$(q,v)\in Q_h \times V_h$,有

$$(\varepsilon^{-1}Q_m p, q)_{T_h} - (Q_k u, \nabla_h \cdot q)_{T_h} + \langle Q_k^b u, q\cdot n\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle Q_k^\Gamma u, q\cdot n\rangle_{*,\Gamma} = (\varepsilon^{-1}Q_m p - p, q)_{T_h^\Gamma} - (Q_k u - u, \nabla_h \cdot q)_{T_h^\Gamma} + \langle Q_k^b u - u, q\cdot n\rangle_{\partial T_h^\Gamma \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle Q_k^\Gamma u - u, q\cdot n\rangle_{*,\Gamma}$$

$$(\nabla_h \cdot (Q_m p + b Q_k u), v)_{T_h} + (c Q_k u, v)_{T_h} + \langle \tau(Q_k u - Q_k^b u), v\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle \eta(Q_k u - Q_k^\Gamma u), v\rangle_{*,\Gamma} = (f, v) + (c(Q_k u - u), v)_{T_h} - (Q_m p - p, \nabla_h v)_{T_h^\Gamma} - (b(Q_k u - u), \nabla_h v)_{T_h} + \langle (Q_m p - p)\cdot n + b\cdot n(Q_k u - u), v\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle (Q_m p - p)\cdot n + b\cdot n(Q_k u - u), v\rangle_{*,\Gamma} + \langle \tau(Q_k u - Q_k^b u), v\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle \eta(Q_k u - Q_k^\Gamma u), v\rangle_{*,\Gamma}.$$

上式分别与方程 (6a) 和 (6b) 相减即可得到式 (15a) 和 (15b).

接着我们证明 (15c) 和 (15d). 对任意$(\hat{\mu},\tilde{\mu}) \in \hat{V}_h(0) \times \tilde{V}_h(0)$,

$$\langle (e_h^p + b e_h^u)\cdot n, \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle \tau(e_h^u - e_h^{\hat{u}}), \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} = \langle (Q_m p - p)\cdot n + b\cdot n(Q_k u - u), \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle (p + bu)\cdot n, \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} - \langle (p_h + b u_h)\cdot n, \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} + \langle \tau(Q_k u - Q_k^b u), \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} - \langle \tau(u_h - \hat{u}_h), \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma},$$

$$\langle (e_h^p + b e_h^u)\cdot n, \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma} + \langle \eta(e_h^u - e_h^{\tilde{u}}), \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma} = \langle (Q_m p - p)\cdot n + b\cdot n(Q_k u - u), \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma} + \langle (p + bu)\cdot n, \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma} - \langle (p_h + b u_h)\cdot n, \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma} + \langle \eta(Q_k u - Q_k^b u), \tilde{\mu}\rangle_{\partial *,\Gamma} - \langle \eta(u_h - \hat{u}_h), \tilde{\mu}\rangle_{\partial *,\Gamma}.$$

结合方程 (6c) 和 (6d),以及

$$\langle (p + bu)\cdot n, \hat{\mu}\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} = 0,$$

$$\langle (p + bu)\cdot n, \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma} = \langle g_N^\Gamma, \tilde{\mu}\rangle_{*,\Gamma}$$

即可得式(15c) 和 (15d). 证毕.

定义范数

$$\|\cdot\|_{0,T_h} := (\cdot,\cdot)_{T_h}^{1/2},$$

$$\|\cdot\|_{0,T_h^\Gamma} := (\cdot,\cdot)_{T_h^\Gamma}^{1/2},$$

$$\|\cdot\|_{0,\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma} := \langle \cdot,\cdot\rangle_{\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma}^{1/2},$$

$$\|\cdot\|_{*,\Gamma} := \langle \cdot,\cdot\rangle_{*,\Gamma}^{1/2}.$$

我们引入一个定义在 $Q_h \times V_h \times \hat{V}_h \times \tilde{V}_h(0)$ 的能量范数 $\||\cdot|\|$:对任意的$(q,v,\hat{\mu},\tilde{\mu}) \in Q_h \times V_h \times \hat{V}_h \times \tilde{V}_h(0)$,

$$\||(q,v,\hat{\mu},\tilde{\mu})|\|^2 = \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} q\|_{0,T_h}^2 + \|\tau^{\frac{1}{2}}(v - \hat{\mu})\|_{0,\partial T_h \backslash \varepsilon_h^\Gamma}^2 + \|\eta^{\frac{1}{2}}(v - \tilde{\mu})\|_{*,\Gamma}^2 + \|\sigma_0^{\frac{1}{2}} v\|_{0,T_h}^2.$$

引理 5.5　设 $(p,u) \in (H^k(\Omega_1 \cup \Omega_2))^d \times H^{k+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ 为问题 (5) 的解,$(p_h, u_h, \hat{u}_h, \tilde{u}_h) \in Q_h \times V_h \times \hat{V}_h(g) \times \tilde{V}_h(0)$为问题 (6a)~(6d) 的解. 则对任意的 $h \in (0, h_0]$(h_0 的定义见引理 5.1),成立

$$\frac{1}{2}\||(e_h^p, e_h^u, e_h^{\hat{u}}, e_h^{\tilde{u}})|\|^2 \leqslant L_1(e_h^p) + L_2(e_h^u - e_h^{\hat{u}}) + L_3(e_h^u - e_h^{\tilde{u}}) + L_4(e_h^u) \tag{16}$$

和

$$\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nabla_h e_h^u\|_{0,T_h} \lesssim h^k(\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} p\|_{k,\Omega_1\cup\Omega_2} + \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2}) + \||(e_h^p, e_h^u, e_h^{\hat{u}}, e_h^{\tilde{u}})|\| \tag{17}$$

证明　在误差方程（15a）～（15d）中取 $(q,v,\widehat{\mu},\widetilde{\mu})=(e_h^p,e_h^u,-e_h^{\widehat{u}},-e_h^{\widetilde{u}})$，再把四个方程加起来可得

$$(\varepsilon^{-1}e_h^p,e_h^p)_{T_h}+(c\,e_h^u,e_h^u)_{T_h}+\langle\tau(e_h^u-e_h^{\widehat{u}}),e_h^u-e_h^{\widehat{u}}\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\langle\eta(e_h^u-e_h^{\widetilde{u}}),e_h^u-e_h^{\widetilde{u}}\rangle_{*,\Gamma}+(\nabla_h\varepsilon(b\,e_h^u),e_h^u)_{T_h}-\langle b\cdot n\,e_h^u,e_{hh}^{\widehat{u}}\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}-\langle b\cdot n\,e_h^u,e_h^{\widetilde{u}}\rangle_{*,\Gamma}=L_1(e_h^p)+L_2(e_h^u-e_h^{\widehat{u}})+L_3(e_h^u-e_h^{\widetilde{u}})+L_4(e_h^u)\tag{18}$$

类似定理 4.1 的证明，由 $\langle b\cdot n\,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widehat{u}}\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}=0$ 以及 $\langle b\cdot n\,e_h^{\widetilde{u}},e_h^{\widetilde{u}}\rangle_{*,\Gamma}=0$，方程（18）可以重新写为

$$(\varepsilon^{-1}e_h^p,e_h^p)_{T_h}+\left(\left(c+\frac{1}{2}\nabla\cdot b\right)e_h^u,e_h^u\right)_{T_h}+\langle\tau(e_h^u-e_h^{\widehat{u}}),e_h^u-e_h^{\widehat{u}}\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\langle\eta(e_h^u-e_h^{\widetilde{u}}),e_h^u-e_h^{\widetilde{u}}\rangle_{*,\Gamma}=L_1(e_h^p)+L_2(e_h^u-e_h^{\widehat{u}})+L_3(e_h^u-e_h^{\widetilde{u}})+L_4(e_h^u)-\left\langle\frac{1}{2}b\cdot n(e_h^u-e_h^{\widehat{u}}),e_h^u-e_h^{\widehat{u}}\right\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}-\left\langle\frac{1}{2}b\cdot n(e_h^u-e_h^{\widetilde{u}}),e_h^u-e_h^{\widetilde{u}}\right\rangle_{*,\Gamma},$$

再由 $\|\,|\cdot|\,\|$ 的定义，即可得到（16）式成立.

接着证明(17) 式. 在（15a）式中取 $q=\varepsilon\nabla_h e_h^u$，分部积分得

$$\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h}^2=(\nabla_h e_h^u,\varepsilon\nabla_h e_h^u)_{T_h}=M+L_1(\varepsilon\nabla_h e_h^u)\tag{19}$$

其中

$$M=(\varepsilon^{-1}e_h^p,\varepsilon\nabla_h e_h^u)_{T_h}+\langle e_h^u-e_h^{\widehat{u}},\varepsilon\nabla_h e_h^u\cdot n\rangle_{\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\langle e_h^u-e_h^{\widetilde{u}},\varepsilon\nabla_h e_h^u\cdot n\rangle_{*,\Gamma}.$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式、迹不等式和分部积分，对每一项进行估计：

$$M\lesssim\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}e_h^p\|_{0,T_h}\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}(e_h^u-e_h^{\widehat{u}})\|_{0,\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}\cdot h^{\frac{1}{2}}\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}(e_h^u-e_h^{\widetilde{u}})\|_{*,\Gamma}\cdot h^{\frac{1}{2}}\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{*,\Gamma}\lesssim\|\,|(e_h^p,e_h^u,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widetilde{u}})|\,\|\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h},$$

$$L_1(\varepsilon\nabla_h e_h^u)\lesssim\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(Q_m p-p)\|_{0,T_h^\Gamma}\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h^\Gamma}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h(Q_k u-u)\|_{0,T_h^\Gamma}\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h^\Gamma}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}(Q_k u-Q_k^\partial u)\|_{0,\partial T_h^\Gamma\backslash\varepsilon_h^\Gamma}\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,\partial T_h^\Gamma\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}(Q_k u-Q_k^\Gamma u)\|_{*,\Gamma}\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{*,\Gamma}\lesssim h^k(\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}p\|_{k,\Omega_1\cup\Omega_2}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2})\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h},$$

再结合方程（19)，即可得（17)式，引理得证.

引理 5.6　设 $(p,u)\in(H^k(\Omega_1\cup\Omega_2))^d\times H^{k+1}(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 为问题（5）的解，$(p_h,u_h,\widehat{u}_h,\widetilde{u}_h)\in Q_h\times V_h\times\widehat{V}_h(g)\times\widetilde{V}_h(0)$ 为问题（6a）～（6d）的解. 则对任意的 $h\in(0,h_0]$（h_0 见引理 5.1)，成立

$$\|\,|(e_h^p,e_h^u,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widetilde{u}})|\,\|\lesssim h^k((b_0^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}+\sigma_0^{-\frac{1}{2}}(b_0+c_0h))\|u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2}+\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}p\|_{k,\Omega_1\cup\Omega_2}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2})\tag{20}$$

其中 $b_0=\|b\|_{0,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2}$，$c_0=\|c\|_{0,\infty,\Omega_1\cup\Omega_2}$，$\bar{\sigma}=c+\frac{1}{2}\nabla\cdot b$，$\sigma_0:=\inf_{x\in\Omega_1\cup\Omega_2}\bar{\sigma}>0$.

证明　应用 Cauchy-Schwarz 不等式，迹不等式和逆不等式，对(16) 式右端的每一项进行估计

$$L_1(e_h^p)\lesssim\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(Q_m p-p)\|_{0,T_h}\cdot\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}e_h^p\|_{0,T_h}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}(Q_k u-u)\|_{0,T_h}\cdot\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\nabla_h\cdot e_h^p\|_{0,T_h}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}(Q_k^\partial u-u)\|_{0,\partial T_h^\Gamma\backslash\varepsilon_h^\Gamma}\cdot\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}e_h^p\|_{0,\partial T_h^\Gamma\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}(Q_k^\Gamma u-u)\|_{*,\Gamma}\cdot\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}e_h^p\|_{*,\Gamma}\lesssim h^k(\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}p\|_{k,\Omega_1\cup\Omega_2}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2})\lesssim\|\,|(e_h^p,e_h^u,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widetilde{u}})|\,\|,$$

$$L_2(e_h^u-e_h^{\widehat{u}})+L_3(e_h^u-e_h^{\widetilde{u}})\lesssim(\|\tau^{-\frac{1}{2}}(Q_m p-p)\|_{0,\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\|\eta^{-\frac{1}{2}}(Q_m p-p)\|_{*,\Gamma}+\|\tau^{\frac{1}{2}}(Q_k u-u)\|_{0,\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\|\tau^{\frac{1}{2}}(u-Q_k^\partial u)\|_{0,\partial T_h\backslash\varepsilon_h^\Gamma}+\|\eta^{\frac{1}{2}}(Q_k u-u)\|_{*,\Gamma}+\|\eta^{\frac{1}{2}}(u-Q_k^\Gamma u)\|_{*,\Gamma})\lesssim\|\,|(e_h^p,e_h^u,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widetilde{u}})|\,\|\lesssim h^k(\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}p\|_{k,\Omega_1\cup\Omega_2}+h^{\frac{1}{2}}\|(b_0^{\frac{1}{2}}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}})u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2})\lesssim\|\,|(e_h^p,e_h^u,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widetilde{u}})|\,\|,$$

$$L_4(e_h^u)\cdot\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(Q_m p-p)\|_{0,T_h^\Gamma}\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h^\Gamma}+\|(Q_k u-u)\|_{0,T_h}\cdot b_0\|\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h}+\|(Q_k u-u)\|_{0,T_h}\cdot c_0\|e_h^u\|_{0,T_h}.\lesssim h^k(\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}p\|_{k,\Omega_1\cup\Omega_2}\cdot\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla_h e_h^u\|_{0,T_h})+h^k\sigma_0^{-\frac{1}{2}}((b_0+c_0h)\|u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2})\lesssim\|\,|(e_h^p,e_h^u,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widetilde{u}})|\,\|.$$

再结合（17）式可得

$$\frac{1}{2}\|\,|(e_h^p,e_h^u,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widetilde{u}})|\,\|^2\lesssim h^k((b_0^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}+\sigma_0^{-\frac{1}{2}}(b_0+c_0h))\|u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2}+\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}p\|_{k,\Omega_1\cup\Omega_2}+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\|_{k+1,\Omega_1\cup\Omega_2})\cdot\|\,|(e_h^p,e_h^u,e_h^{\widehat{u}},e_h^{\widetilde{u}})|\,\|.$$

引理得证.

因为 $p=-\varepsilon\nabla u$，所以由引理 5.6 易得如下的误差估计.

定理 5.7　设 $(p,u)\in(H^k(\Omega_1\cup\Omega_2))^d\times H^{k+1}(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 为问题（5）的解，$(p_h,u_h,\widehat{u}_h,\widetilde{u}_h)\in$

$Q_h \times V_h \times \widehat{V}_h(g) \times \widetilde{V}_h(0)$为问题（6a）~（6d）的解，则对任意的 $h \in (0, h_0]$（h_0的定义参见引理 5.1），成立

$$\| |(e_h^p, e_h^u, e_h^{\widehat{u}}, e_h^{\widetilde{u}})| \| \cdot h^k((b_0^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} + \sigma_0^{-\frac{1}{2}}(b_0 + c_0 h)) \| u \|_{k+1,\Omega_1 \cup \Omega_2} + \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u \|_{k+1,\Omega_1 \cup \Omega_2}),$$

其中$b_0 = \| b \|_{0,\infty,\Omega_1 \cup \Omega_2}$，$c_0 = \| c \|_{0,\infty,\Omega_1 \cup \Omega_2}$，$\bar{\sigma} = c + \frac{1}{2}\nabla \cdot b$，$\sigma_0 \cdot \inf_{x \in \Omega_1 \cup \Omega_2} \bar{\sigma} > 0$，且

$$\| |(e_h^p, e_h^u, e_h^{\widehat{u}}, e_h^{\widetilde{u}})| \|^2 = \| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} e_h^p \|_{0,T_h}^2 + \| \tau^{\frac{1}{2}}(e_h^u - e_h^{\widehat{u}}) \|_{0,\partial T_h \setminus \varepsilon_h^\Gamma}^2 + \| \eta^{\frac{1}{2}}(e_h^u - e_h^{\widetilde{u}}) \|_{*,\Gamma}^2 + \| \sigma_0^{\frac{1}{2}} e_h^u \|_{0,T_h}^2,$$

其中$e_h^p, e_h^u, e_h^{\widehat{u}}, e_h^{\widetilde{u}}$的定义见（14）式.

6　结　论

本文针对对流-扩散-反应方程界面问题提出了一个任意阶的扩展杂交间断 Galerkin 有限元. 在假设 1.1 和 1.2 成立的条件下，利用 Lax-Milgram 定理证明了弱解的存在唯一性. 对离散格式，本文给出了解的存在唯一性结果及其在能量范数下的最优误差估计.

参考文献：

[1] Ames W F. Nonlinear partial differential equations in engineering [M]. New York: Academic Press, 1965.

[2] Murray J D. Nonlinear differential equation models in biology [M]. Oxford: Clarendon Press, 1977.

[3] Wang X, Posny D, Wang J. A reaction-convection-diffusion model for cholera spatial dynamics [J]. Discrete Cont Dyn-B, 2016, 21: 2785.

[4] Ribeiro M C, Rego L G C, D'Ajello P C T. Diffusion, reaction and forced convection in electrochemical cells [J]. J Electroanal Chem, 2009, 628: 21.

[5] Babuška I. The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients [J]. Computing, 1970, 5: 207.

[6] 许进超. 具有间断系数的二阶椭圆型方程的有限元解的敛速估计[J]. 湘潭大学：自然科学学报，1982，1：84.

[7] Barrett J W, Elliott C M. Fitted and unfitted finite element methods for elliptic equations with smooth interfaces [J]. IMA J Numer Anal, 1987, 7: 283.

[8] Bramble J H, King J T. A finite element method for interface problems in domains with smooth boundaries and interfaces [J]. Adv Comput Math, 1996, 6: 109.

[9] Cai Z, He C, Zhang S. Discontinuous finite element methods for interface problems: robust a priori and a posteriori error estimates [J]. SIAM J Numer Anal, 2017, 55: 400.

[10] Chen Z, Zou J. Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems [J]. Numer Math, 1998, 79: 175.

[11] Babuška I, Caloz G, Osborn J E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients [J]. SIAM J Numer Anal, 1994, 31: 945.

[12] Strouboulis T, Babuška I, Copps K. The design and analysis of the generalized finite element method [J]. Comput Method Appl M, 2000, 181: 43.

[13] Abdelaziz Y, Hamouine A. A survey of the extended finite element [J]. Comput Struct, 2008, 86: 1141.

[14] Fries T P, Belytschko T. The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications [J]. Int J Numer Meth Eng, 2010, 84: 253.

[15] Wu H, Xiao Y. An unfitted hp-interface penalty finite element method for elliptic interface problems [J]. J Comput Math, 2019, 37: 316.

[16] Hansbo A, Hansbo P. An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems [J]. Comput Method Appl M, 2002, 191: 5537.

[17] Han Y, Chen H, Wang X, et al. EXtended HDG methods for second order elliptic interface problems [J]. J Sci Comput, 2020, 84: 22.

[18] Han Y, Wang X, Xie X. An interface/boundary-unfitted eXtended HDG method for linear elasticity problems [EB/OL]. [2022-02-07]. https://www.arxiv.org/pdf/2004.06275v2.pdf.

[19] Reusken A, Nguyen T H. Nitsche's method for a transport problem in two-phase incompressible flows [J]. J Fourier Anal Appl, 2009, 15: 663.

[20] Lehrenfeld C, Reusken A. Nitsche-XFEM with streamline diffusion stabilization for a two-phase mass transport problem [J]. SIAM J Sci Comput, 2012, 34: A2740.

[21] Pietro D, Ern A, Guermond J L. Discontinuous Galerkin methods for anisotropic semi-definite diffusion with advection [J]. SIAM J Numer Anal, 2008, 46: 805.

[22] Cockburn B, Gopalakrishnan J, Lazarov R. Unified

hybridization of discontinuous Galerkin, mixed, and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems [J]. SIAM J Numer Anal, 2009, 47: 1319.

[23] Cockburn B, Dong B, Guzmán J, *et al*. A hybridizable discontinuous Galerkin method for steady-state convection-diffusion-reaction problems [J]. SIAM J Sci Comput, 2009, 31: 3827.

[24] Qiu W, Shi K. An HDG method for convection diffusion equation [J]. J Sci Comput, 2016, 66: 346.

[25] Chen G, Feng M, Xie X. A robust WG finite element method for convection-diffusion-reaction equations [J]. J Comput Appl Math, 2017, 315: 107.

[26] Adams R A. Sobolev spaces [M]. New York: Academic Press, 1975.

[27] Brenner S C, Scott L R. The mathematical theory of finite element methods [M]. New York: Springer, 2008.

引用本文格式：

中　文：王慧媛，陈豫眉. 对流－扩散－反应方程界面问题的扩展杂交间断有限元[J]. 四川大学学报：自然科学版，2023，60：021003.

英　文：Wang H Y, Chen Y M. An extended HDG finite element for convection-diffusion-reaction equation interface problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2023, 60: 021003.