

具有质量涨落的双分数阶耦合振子系统的随机共振

夏 伟¹, 任芮彬², 罗懋康¹, 邓 科¹

(1. 四川大学数学学院, 成都 610064; 2. 西南交通大学数学学院, 成都 611756)

摘 要: 本文对具有质量涨落的双分数阶耦合振子系统的随机共振(Stochastic Resonance, SR)进行了研究. 利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换求得系统输出振幅增益(Output Amplitude Gain, OAG)的解析式后, 本文研究了不同参数对 OAG 共振行为的影响. 数值模拟结果显示, OAG 随噪声强度、信号频率、阻尼系数的变化出现随机共振. 此外分数阶和耦合系数对 OAG 的随机共振也有影响.

关键词: 分数阶耦合振子; 质量涨落; 随机共振

中图分类号: O29 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2023.021002

Stochastic resonance of a double fractional coupled oscillator system with mass fluctuation

XIA Wei¹, REN Rui-Bin², LUO Mao-Kang¹, DENG Ke¹

(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

2. College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract: This paper explores the stochastic resonance (SR) of a coupled fractional oscillator system with mass fluctuation. The Shapiro-Loginov formula and Laplace transform are applied to obtain the analytical expression of the output amplitude gain (OAG) of the system, and the dependence of OAG on system parameters are studied. Numerical simulation shows that SR can be induced by the strength of noise, signal frequency, fractional order, damping intensity, and the fractional order and coupling parameters have an impact on the SR of OAG as well.

Keywords: Fractional coupled oscillator; Mass fluctuation; Stochastic resonance

1 引 言

近年来,人们发现,在随机非线性系统中当输入信号、噪声以及系统的非线性条件之间存在某种匹配时,系统的稳态响应振幅会显著增大. 这一现象因与传统共振现象相似而被称为随机共振(Stochastic Resonance, SR)^[1,2]. 长期以来,对 SR 现象的研究广受关注,其结果也被应用于物理、生物、工程技术等众多领域^[3-9].

在黏弹性介质中,粒子的运动受其历史运动的

影响,此时用分数阶导数代替 Langevin 方程中的整数阶导数是适当的. Soika 等^[10]研究了双态随机噪声和三态随机噪声驱动的分数量性 Langevin 方程,发现系统出现 SR. 钟苏川等^[11]研究了一个带有固有频率涨落的双分数阶 Langevin 方程,发现随着外部信号频率、系统参数和噪声参数的变化,系统的输出振幅出现非单调变化.

另一方面,很多系统是相互耦合的. 蔚涛等^[12]在一个双粒子耦合的分数量振子系统中引入质量涨落,研究了系统的随机共振. Vishwamittar 等^[13]

收稿日期: 2022-05-06

基金项目: 国家重点研发计划(2020YFA0714000)

作者简介: 夏伟(1998—), 男, 安徽合肥人, 硕士研究生, 主要研究方向为智能系统和数学信息技术. E-mail: 1876555393@qq.com

通讯作者: 邓科. E-mail: dk_83@126.com

研究了一个双粒子耦合的双分数阶 Langevin 系统,并在系统固有频率和耦合参数中考虑外噪声的影响,发现系统固有频率以及耦合参数的变化会使系统输出振幅增益(Output Amplitude Gain, OAG)出现 SR. 值得注意的是,粒子往往具有一定的吸附能力,会随机地吸附周围的粒子或分解出粒子,导致其质量的波动^[14,15]. Gitterman 和 Shapiro^[16]在线性振子中引入质量涨落来模拟随机质量,并发现了 SR 现象.

据我们了解,现有的研究大多考虑单分数阶 Langevin 方程中质量涨落^[17,18],阻尼涨落^[19,20],固有频率涨落^[21-23]以及是否存在时延等^[24-27],双分数阶耦合振子系统中当粒子出现质量涨落的演化行为还没有被研究过. 本文基于双分数阶 Langevin 方程来构建双粒子耦合系统^[28,29]存在质量波动的研究其共振行为.

本文结构如下:第二节介绍模型并求解系统的 OAG. 在第三节中我们进行模拟仿真,观察随机共振现象. 第四节为总结.

2 模 型

考虑如下具有随机质量波动的分数阶双粒子耦合系统:

$$\begin{cases} (m_1 + a\mu(t))D^\alpha x_1(t) + \gamma_1 D^\beta x_1(t) + \omega x_1(t) = \epsilon_1(x_2(t) - x_1(t)) + A\cos(\Omega t), \\ (m_2 + b\mu(t))D^\alpha x_2(t) + \gamma_2 D^\beta x_2(t) + \omega x_2(t) = \epsilon_2(x_1(t) - x_2(t)) + A\cos(\Omega t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_1(t), x_2(t)$ 为两个粒子的位置; m_1, m_2 为两个粒子的基本质量; $\gamma_i, i=1,2$ 是阻尼项; $\mu(t)$ 是作用在质量项的随机噪声; a, b 是其幅度; ω 是系统固有频率; ϵ_i 是耦合系数; Ω 是弱信号频率; A 是信号幅度; D^α 和 D^β 是 Caputo 分数阶导数^[30], $1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 1$.

$${}_a^C D_t^\rho [f(t)] = \left[\frac{1}{\Gamma(n-p)} \right] \int_a^t (t-\tau)^{(n-p-1)} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

在本文中, $\mu(t)$ 是一个对称双态噪声,取值在 $+\sigma$, $\sigma > 0$ 间跳跃. 从 σ 跳转到 $-\sigma$ 的概率是 p_1 , 保持 σ 不变的概率为 $1-p_1$, 从 $-\sigma$ 跳转到 σ 的概率是 p_2 , 保持 $-\sigma$ 不变的概率为 $1-p_2$. 记噪声强度为 σ^2 , 相关率为 λ , 其中 $\lambda = p_1 + p_2$, 噪声不对称度(定义为噪声强度绝对值的差)为 $\Lambda = 0$. 此外, 对称双态噪声有如下统计性质.

$$\langle \mu(t) \rangle = 0 \quad (3)$$

$$\langle \mu(t)\mu(s) \rangle = \sigma^2 e^{(-\lambda|t-s|)} \quad (4)$$

$$\langle \mu(t)D^\alpha x(t) \rangle = e^{-\lambda t} D^\alpha [\langle \mu(t)x(t) \rangle e^{\lambda t}] \quad (5)$$

由分数阶 Shapiro-Loginov 公式^[31]和双态噪声的性质,有

$$\langle \mu^2(t)D^\alpha x(t) \rangle = \sigma^2 \langle D^\alpha x(t) \rangle + \Lambda e^{-\lambda t} D^\alpha [\langle \mu(t)x(t) \rangle e^{\lambda t}] = \sigma^2 \langle D^\alpha x(t) \rangle \quad (6)$$

首先我们对方程(1)两端取均值得

$$\begin{cases} (m_1 D^\alpha + \gamma_1 D^\beta + \omega + \epsilon_1) \langle x_1(t) \rangle + a e^{-\lambda t} D^\alpha (\langle \mu(t)x_1(t) \rangle e^{\lambda t}) = \epsilon_1 \langle x_2(t) \rangle + A \cos(\Omega t), \\ (m_2 D^\alpha + \gamma_2 D^\beta + \omega + \epsilon_2) \langle x_2(t) \rangle + b e^{-\lambda t} D^\alpha (\langle \mu(t)x_2(t) \rangle e^{\lambda t}) = \epsilon_2 \langle x_1(t) \rangle + A \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (7)$$

为了处理平均化后方程中出现的新变量 $\langle \mu(t)x_1(t) \rangle$ 和 $\langle \mu(t)x_2(t) \rangle$, 将方程(1)等号两边同乘 $\mu(t)$ 后得到

$$\begin{cases} (m_1 \mu(t) + a \mu(t)^2) D^\alpha x_1(t) + \gamma_1 \mu(t) D^\beta x_1(t) + \omega \mu(t) x_1(t) = \epsilon_1 \mu(t) (x_2(t) - x_1(t)) + A \mu(t) \cos(\Omega t), \\ (m_2 \mu(t) + b \mu(t)^2) D^\alpha x_2(t) + \gamma_2 \mu(t) D^\beta x_2(t) + \omega \mu(t) x_2(t) = \epsilon_2 \mu(t) (x_1(t) - x_2(t)) + A \mu(t) \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (8)$$

对方程(8)进行平均化处理后可得

$$\begin{cases} m_1 e^{-\lambda t} D^\alpha (\langle \mu(t)x_1(t) \rangle e^{\lambda t}) + \gamma_1 e^{-\lambda t} D^\beta (\langle \mu(t)x_1(t) \rangle e^{\lambda t}) + a \sigma^2 D^\alpha \langle x_1(t) \rangle = \epsilon_1 \langle \mu(t)x_2(t) \rangle - (\omega + \epsilon_1) \langle \mu(t)x_1(t) \rangle, \\ m_2 e^{-\lambda t} D^\alpha (\langle \mu(t)x_2(t) \rangle e^{\lambda t}) + \gamma_2 e^{-\lambda t} D^\beta (\langle \mu(t)x_2(t) \rangle e^{\lambda t}) + b \sigma^2 D^\alpha \langle x_2(t) \rangle = \epsilon_2 \langle \mu(t)x_1(t) \rangle - (\omega + \epsilon_2) \langle \mu(t)x_2(t) \rangle \end{cases} \quad (9)$$

将方程(7)和方程(9)合并成一个方程组可得

$$\begin{cases} (m_1 D^\alpha + \gamma_1 D^\beta + \omega + \epsilon_1) \langle x_1(t) \rangle + a e^{-\lambda t} D^\alpha (\langle \mu(t)x_1(t) \rangle e^{\lambda t}) = \epsilon_1 \langle x_2(t) \rangle + A \cos(\Omega t), \\ (m_2 D^\alpha + \gamma_2 D^\beta + \omega + \epsilon_2) \langle x_2(t) \rangle + b e^{-\lambda t} D^\alpha (\langle \mu(t)x_2(t) \rangle e^{\lambda t}) = \epsilon_2 \langle x_1(t) \rangle + A \cos(\Omega t), \\ m_1 e^{-\lambda t} D^\alpha (\langle \mu(t)x_1(t) \rangle e^{\lambda t}) + \gamma_1 e^{-\lambda t} D^\beta (\langle \mu(t)x_1(t) \rangle e^{\lambda t}) + a \sigma^2 D^\alpha \langle x_1(t) \rangle = \epsilon_1 \langle \mu(t)x_2(t) \rangle - (\omega + \epsilon_1) \langle \mu(t)x_1(t) \rangle, \\ m_2 e^{-\lambda t} D^\alpha (\langle \mu(t)x_2(t) \rangle e^{\lambda t}) + \gamma_2 e^{-\lambda t} D^\beta (\langle \mu(t)x_2(t) \rangle e^{\lambda t}) + b \sigma^2 D^\alpha \langle x_2(t) \rangle = \epsilon_2 \langle \mu(t)x_1(t) \rangle - (\omega + \epsilon_2) \langle \mu(t)x_2(t) \rangle \end{cases} \quad (10)$$

为了书写方便,我们做如下替换

$$y_1(t) = \langle x_1(t) \rangle, y_2(t) = \langle x_2(t) \rangle, y_3(t) = \langle \mu(t)x_1(t) \rangle, y_4(t) = \langle \mu(t)x_2(t) \rangle \quad (11)$$

接下来我们使用拉普拉斯变换方法来求解方程组

(10). 用 $Y_i(t)$ 来表示 $y_i(t)$ 的拉普拉斯变换, 有

$$\begin{cases} T_{11}Y_1(s) + T_{12}Y_2(s) + T_{13}Y_3(s) + T_{14}Y_4(s) = \\ A \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \\ T_{21}Y_1(s) + T_{22}Y_2(s) + T_{23}Y_3(s) + T_{24}Y_4(s) = \\ A \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \\ T_{31}Y_1(s) + T_{32}Y_2(s) + T_{33}Y_3(s) + T_{34}Y_4(s) = 0, \\ T_{41}Y_1(s) + T_{42}Y_2(s) + T_{43}Y_3(s) + T_{44}Y_4(s) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

从而有

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{D_1}{D} = H_1(s) A \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \\ Y_2(s) &= \frac{D_2}{D} = H_2(s) A \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} T_{11} &= m_1 s^\alpha + \gamma_1 s^\beta + \omega + \epsilon_1, \\ T_{12} &= -\epsilon_1, T_{13} = a(s + \lambda)^\alpha, \\ T_{14} &= 0, T_{21} = -\epsilon_2, \\ T_{22} &= m_2 s^\alpha + \gamma_2 s^\beta + \omega + \epsilon_2, \\ T_{23} &= 0, T_{24} = b(s + \lambda)^\alpha, \\ T_{31} &= a\sigma^2 s^\alpha, T_{32} = 0, \\ T_{33} &= m_1(s + \lambda)^\alpha + \gamma_1(s + \lambda)^\beta + \omega + \epsilon_1, \\ T_{34} &= -\epsilon_1, T_{41} = 0, \\ T_{42} &= b\sigma^2 s^\alpha, T_{43} = -\epsilon_2, \\ T_{44} &= m_2(s + \lambda)^\alpha + \gamma_2(s + \lambda)^\beta + \omega + \epsilon_2, \\ D &= T_{11}(T_{22}T_{33}T_{44} + T_{23}T_{33}T_{42} + \\ & T_{24}T_{32}T_{43} - T_{24}T_{33}T_{42} - \\ & T_{23}T_{32}T_{44} - T_{22}T_{34}T_{43}) - \\ & T_{12}(T_{21}T_{33}T_{44} + T_{23}T_{34}T_{41} + \\ & T_{24}T_{31}T_{43} - T_{24}T_{33}T_{41} - \\ & T_{23}T_{31}T_{44} - T_{21}T_{34}T_{43}) + \\ & T_{13}(T_{21}T_{32}T_{44} + T_{22}T_{34}T_{41} + \\ & T_{24}T_{31}T_{42} - T_{24}T_{32}T_{41} - \\ & T_{22}T_{31}T_{44} - T_{21}T_{34}T_{42}) - \\ & T_{14}(T_{21}T_{32}T_{43} + T_{22}T_{33}T_{41} + \\ & T_{23}T_{31}T_{42} - T_{23}T_{32}T_{41} - \\ & T_{22}T_{31}T_{43} - T_{21}T_{33}T_{42}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= A \frac{s}{s^2 + \Omega^2} (T_{22}T_{33}T_{44} + T_{23}T_{34}T_{42} + \\ & T_{24}T_{32}T_{43} - T_{24}T_{33}T_{42} - \\ & T_{23}T_{32}T_{44} - T_{22}T_{34}T_{43}) - \\ & A \frac{s}{s^2 + \Omega^2} (T_{12}T_{33}T_{44} + T_{13}T_{34}T_{42} + \\ & T_{14}T_{32}T_{43} - T_{14}T_{33}T_{42} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_{13}T_{32}T_{44} - T_{12}T_{34}T_{43}), \\ D_2 &= A \frac{s}{s^2 + \Omega^2} (T_{11}T_{33}T_{44} + T_{13}T_{34}T_{41} + \\ & T_{14}T_{31}T_{43} - T_{14}T_{33}T_{41} - \\ & T_{13}T_{31}T_{44} - T_{11}T_{34}T_{43}) - \\ & A \frac{s}{s^2 + \Omega^2} (T_{21}T_{33}T_{44} + T_{23}T_{34}T_{41} + \\ & T_{24}T_{31}T_{43} - T_{24}T_{33}T_{41} - \\ & T_{23}T_{31}T_{44} - T_{21}T_{34}T_{43}), \end{aligned}$$

接着对(13)式中的结果进行拉普拉斯逆变换即得到对应的 $\langle x_i(t) \rangle$. 假设系统稳态响应出现在 $t \rightarrow \infty$ 时, 此时响应对初始条件的依赖消失, 此时系统稳态响应均值为

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \langle x_i(t) \rangle = \langle x_i(t) \rangle_{s.t} = \\ & A \int_0^t h_i(t - \tau) \cos(\Omega\tau) d\tau, t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $h_i(t)$ 是 $H_i(s)$ 的拉普拉斯逆变换, 即系统的松弛函数. 根据线性响应理论^[32], 我们将 $\langle x_i(t) \rangle_{s.t}$ 写成

$$\langle x_i(t) \rangle_{s.t} = A_i \cos(\Omega t + \theta_i), i = 1, 2 \quad (15)$$

这里

$$A_i = A \sqrt{\frac{H_{i,real}^2 + H_{i,imag}^2}{D_{real}^2 + D_{imag}^2}} \quad (16)$$

$$\theta_i = \arctan\left(-\frac{H_{i,real} D_{imag} - H_{i,imag} D_{real}}{H_{i,real} D_{real} + H_{i,imag} D_{imag}}\right) \quad (17)$$

其中, $H_{i,real}$ 是 $H_i(s)$ 的实部; $H_{i,imag}$ 是 $H_i(s)$ 的虚部; D_{real} 是 D 的实部; D_{imag} 是 D 的虚部. 由此我们可以得到系统 OAG 为

$$G_i = \frac{A_i}{A} \quad (18)$$

3 数值结果与分析

3.1 随机噪声强度对 OAG 的作用

首先对我们研究 OAG 对噪声强度 σ^2 的依赖.

从图 1a, 1b 可以看出, 在 α 值从 1.4 增加到 1.8 的过程中, 随着噪声强度的增加 OAG 出现 SR, 且 α 越大 OAG 峰值出现越早, 即出现在低噪声强度时. 随着 α 的减小, OAG 峰值对应的噪声强度变大. 然而, 当 α 取值低于 1.6 之后 OAG 达到峰值时的噪声强度虽然仍在增加, 但 OAG 的最大峰值开始逐渐变大. 在图 1c, 1d 中, 当 β 值逐渐增加时, OAG 同样出现 SR, β 值越小 OAG 峰值出现越早, 且随着 β 取值的增大 OAG 达到峰值时的噪声强度越大. 当 β 取值高于 0.75 后, OAG 达到峰值时的噪声强度虽然仍在增加但 OAG 的最大峰

值开始逐渐变大. 综上, 当分数阶导数 α, β 分别向 2, 0 靠近时, OAG 达到峰值时的噪声强度变小, 峰值较大; 当 α, β 均向 1 靠近时, 虽然系统 OAG 达到

峰值时的噪声强度在增加但 OAG 的最大峰值出现先减后增, 且增加后的 OAG 峰值可能会高于当 α, β 分别向 2, 0 靠近时的峰值.

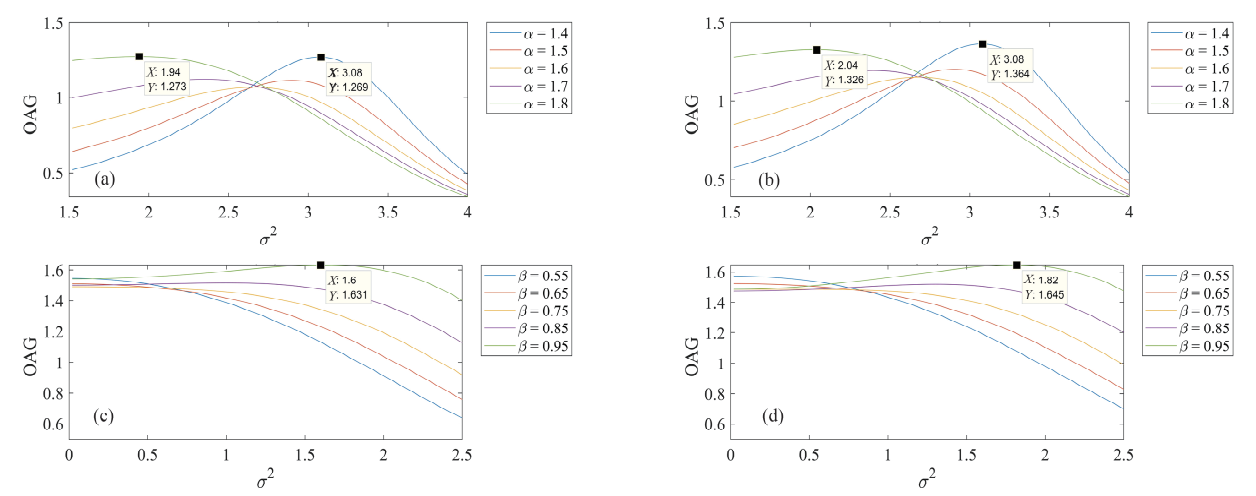


图 1 不同分数阶下 OAG 对噪声强度的依赖
Fig. 1 Dependence of OGA on the noise intensity at different fractional order

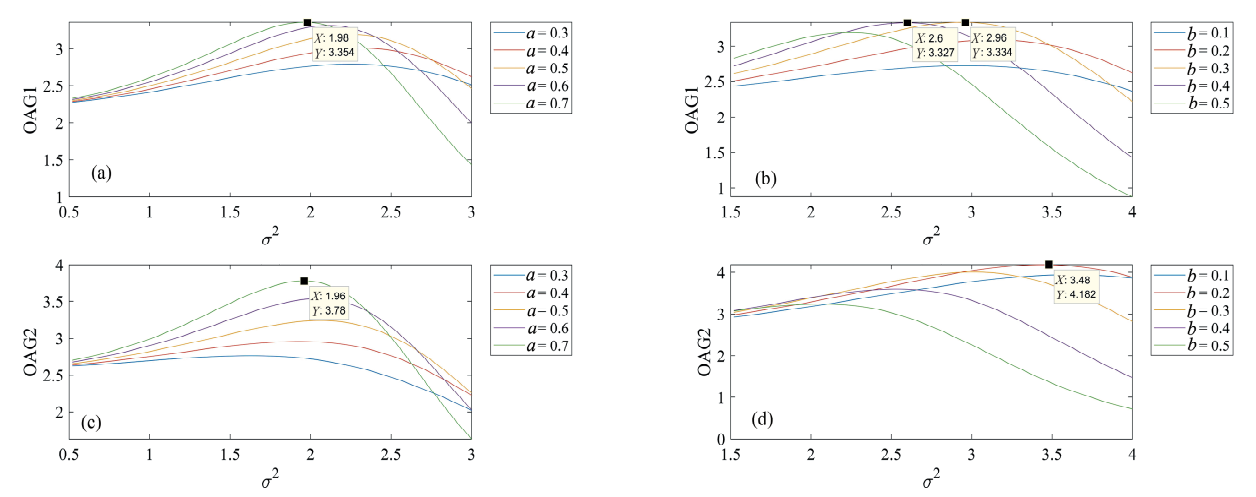


图 2 不同噪声强度值下 OAG 对噪声强度的依赖
Fig. 2 Dependence of OAG on the noise intensity at different strengths of noise

然后, 我们对 OAG 在不同 a, b 取值下对噪声强度的依赖进行研究. 从图 2 可以看到, OAG 随噪声强度增加出现 SR. 由图 2a, 2b 可以看出, 随 a 增加, SR 峰值出现时的噪声强度不断减小, 峰值强度逐渐变大. 由图 2a, 2c 可以观察到, 当 OAG 的 SR 达到峰值时噪声强度大致在 2 左右由图 2b, 2d 可以发现, 随着 b 的增加, OAG 达到峰值时的外噪声强度仍然是逐渐减小的趋势, 而 OAG 峰值则随 b 的增加先增后减, 当参数 b 取值介于 0.2~0.3 之间时 OAG 达到最大值.

增后减, 随机共振出现. 此外, 随耦合系数的变化, OAG 的变化趋势不变, 均在噪声强度增加至 2 左右时达到峰值, 且随着耦合系数的增加 OAG 的峰值不断减小, 可见粒子越活跃 OAG 峰值越大.

接下来我们研究阻尼系数对 OAG 的影响. 从图 4 中我们可以看到, 随着噪声强度的增加, OAG 先增后减, 出现 SR, OAG 在噪声强度取值在 2 左右时达到最大, 之后随噪声强度的增加迅速减小. 阻尼系数部分刻画了黏性介质中粒子所受到的阻尼的大小. 由 OAG 峰值的变化可以看到, 阻尼参数越小, OAG 的越大, 与耦合系数对 OAG 的影响相同.

图 3 示出了耦合系数 ϵ_1, ϵ_2 对 OAG 共振行为的影响. 可以看到, 随着噪声强度的增加, OAG 先

3.2 信号频率对 OAG 的作用

在这一部分,我们研究信号频率的对 OAG 的

作用. 同样,我们首先在分数阶导数取不同值的情

况下研究 OAG 的共振行为.

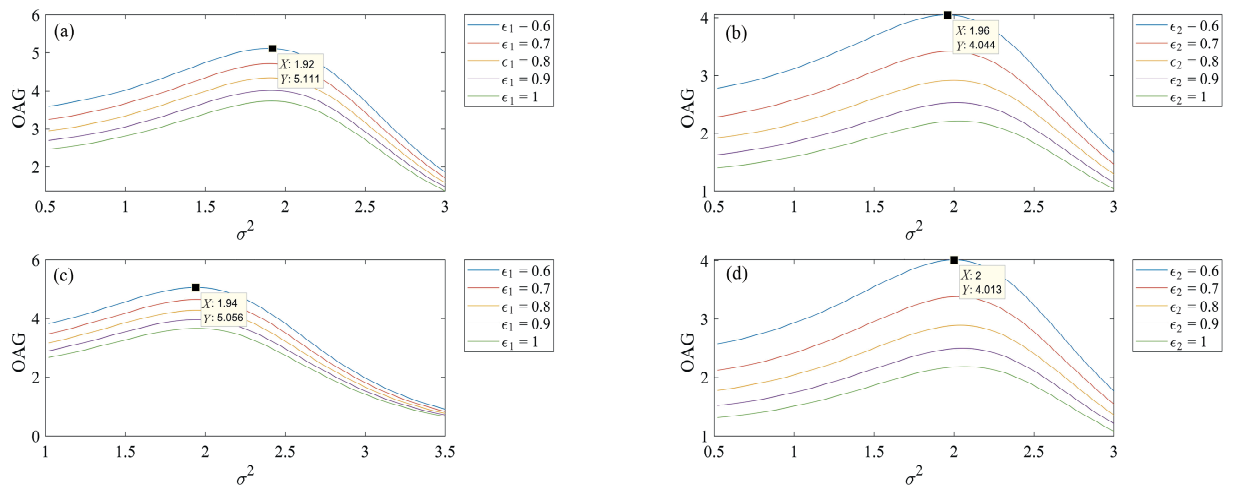


图 3 不同耦合系数下 OAG 对噪声强度的依赖

Fig. 3 Dependence of OAG on the noise intensity at different coupling parameters

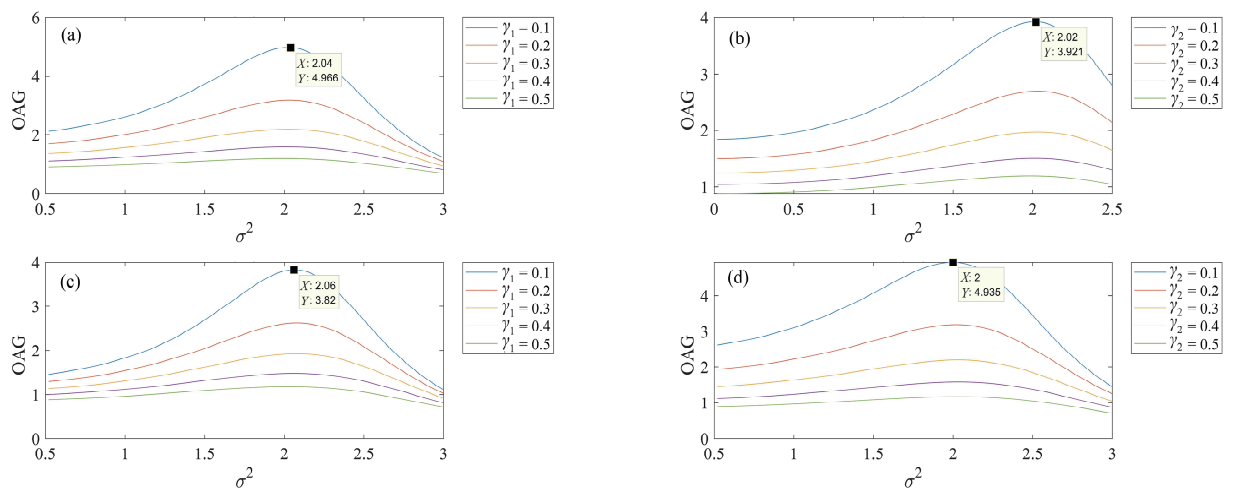


图 4 不同阻尼系数下 OAG 对噪声强度的依赖

Fig. 4 Dependence of OAG on the noise intensity at different damping parameters

从图 5 中我们观察到,随着频率的增加,OAG 先增后减,SR 出现. 从图 5a,5c. 可以观察到,随着 α 不断向 2 靠近,OAG 的峰值越来越大,达到峰值时的频率不断增加,当 α 取值为 1.9 时,OAG 达到峰值,此时的频率也最大,约为 0.6. 其次,由图 5b,5d 可以看到,随着 β 的增加, β 取值越靠近 1 时 OAG 的峰值越大,频率值越低,当 β 取值为 0.9 时 OAG 的峰值达到最大,频率达到最小,约为 0.6. 可见,当分数阶 α, β 分别趋向于 2 和 1 时,OAG 表现出越来越明显的 SR,同时 OAG 达到峰值时的

频率取值分别呈现出越来越大和越来越小的趋势,最终均稳定在 0.6 左右.

下面我们研究噪声强度 a, b 对 OAG 的共振行为影响. 从图 6 中我们可以看出,随噪声强度增大,OAG 峰值逐渐减小,与一般所认为的外噪声会干扰系统输出的预期一致,当噪声强度增加至一定数值时系统增益消失. 因此,在一定范围内,噪声不但不会降低 OAG,反而会使 OAG 的峰值得到提升,即随机共振.

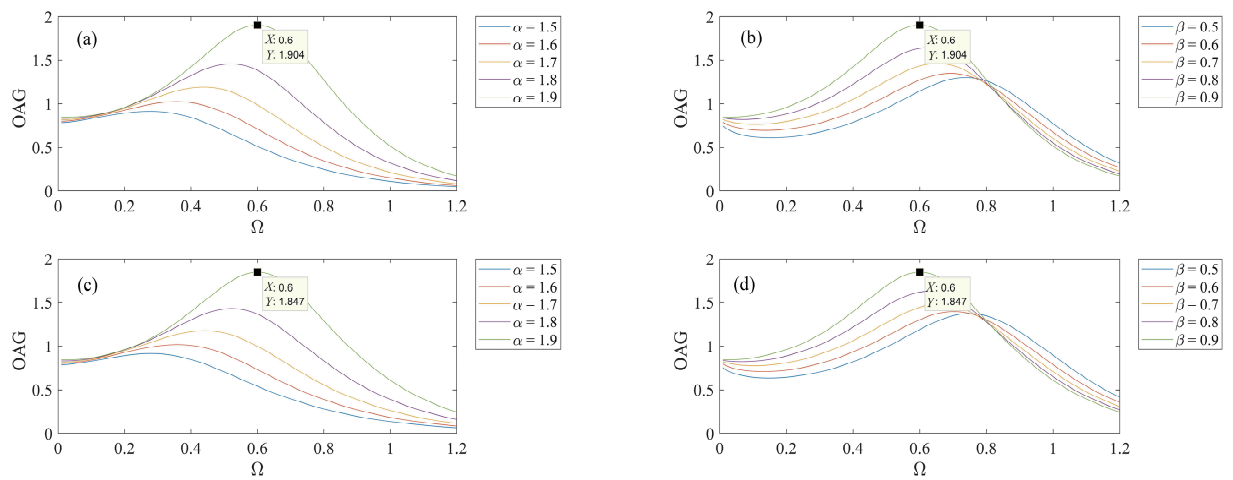


图 5 不同频率、分数阶下 OAG 对信号频率的信赖
Fig. 5 Dependence of OAG on the signal frequency at defferent fractional orders

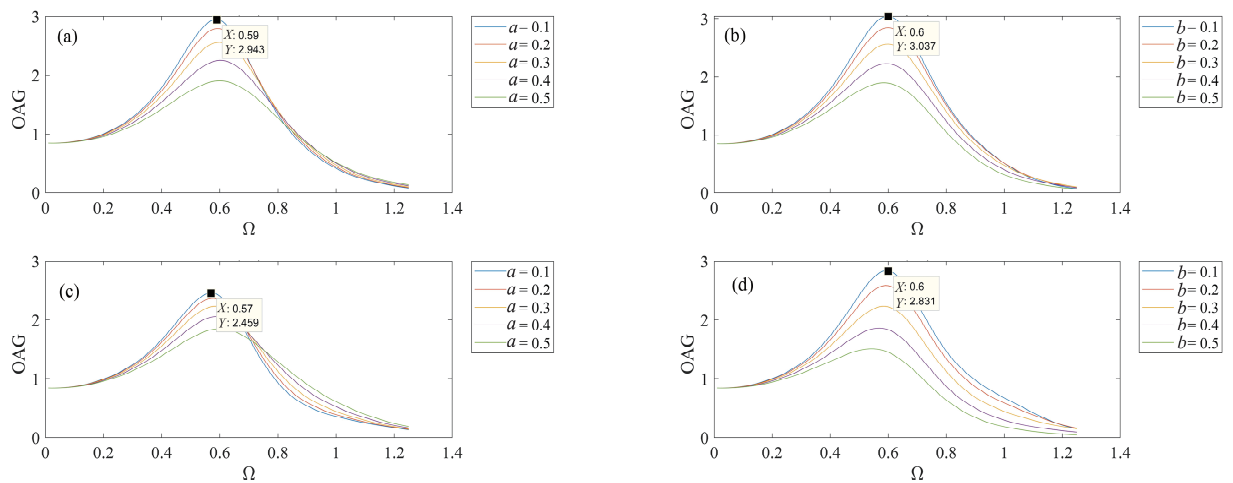


图 6 不同噪声下 OAG 对信号频率的依赖
Fig. 6 Dependence of OAG on the signal frequency at different strengths of the noises

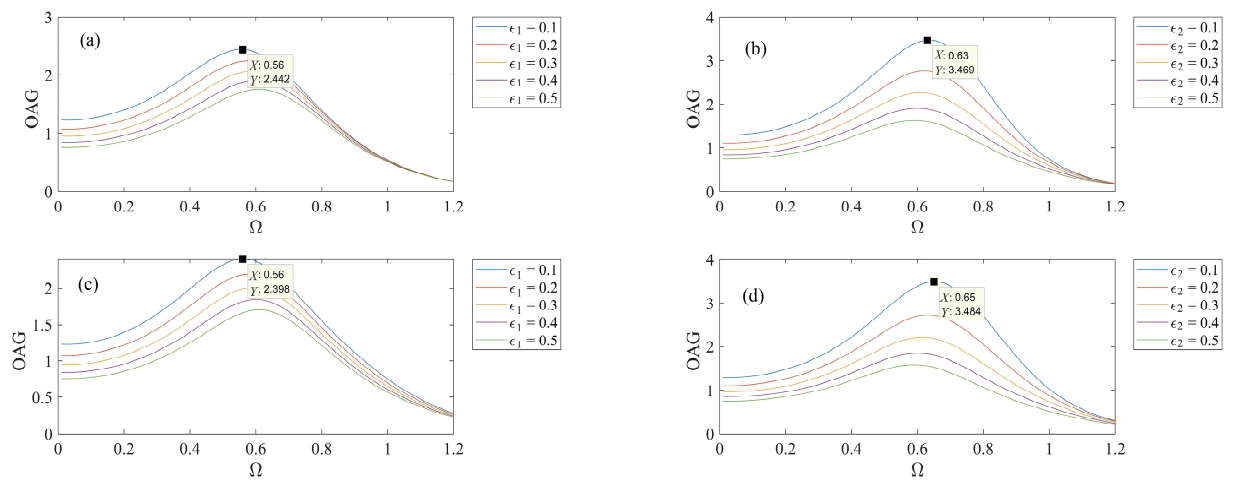


图 7 不同耦合系数下 OAG 对信号频率的信赖
Fig. 7 Dependence of OAG on the signal frequency at different coupling parameters

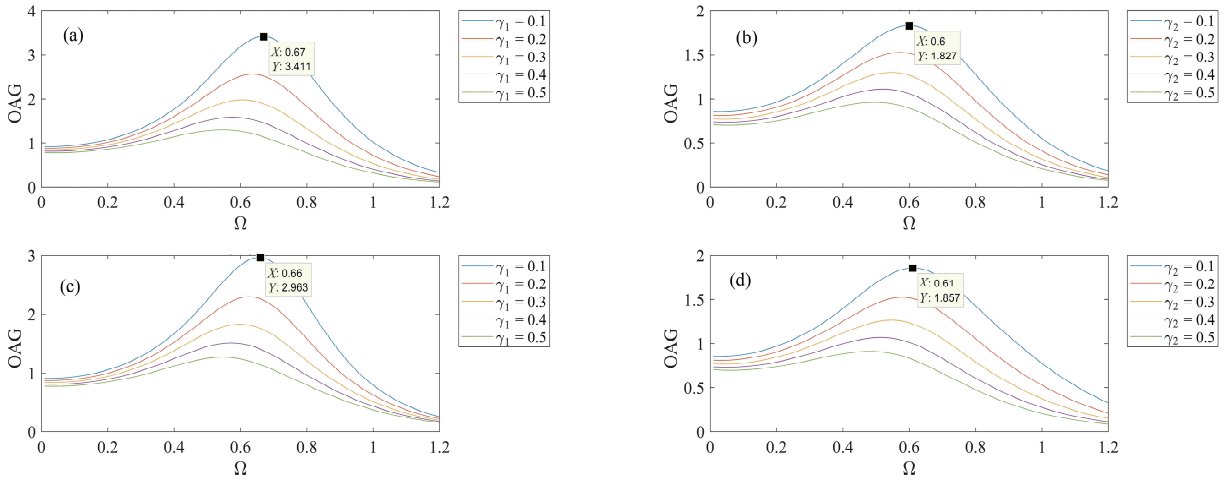


图 8 不同阻尼系数下 OAG 对信号频率的依赖
Fig. 8 Dependence of OAG on the signal frequency at different damping parameters

然后我们研究耦合系数对 OAG 随机共振的作用. 从图 7 中我们可以观察到, 随着驱动频率的增加, OAG 先增后减, 随机共振出现. 进一步观察可以看到, 随着耦合系数的增加, 随机共振的峰值不断降低. 从图 7a, 7c 可以看出, 当耦合系数 ϵ_1 逐渐增大时, OAG 不断减小, 随机共振峰值出现时的频率缓慢增加, 向 0.6 靠近. 从图 7b, 7d 可以看出, 随着耦合系数 ϵ_2 的增加, 随机共振峰值同样逐渐降低, 共振峰值出现时的频率缓慢降低, 也向 0.6 靠近. 所以我们认为, 在系统参数固定的前提下, 可能存在一个最优频率, 使 OAG 达到最大.

最后我们研究阻尼系数对 OAG 共振的影响. 从图 8 中我们可以看出, 随着驱动频率增长, OAG 先增后减, 随机共振出现. 此外, 当阻尼系数 γ_1, γ_2 逐渐增加时, 系统的随机共振峰值逐渐减小. 其原因是当耦合系数、阻尼系数增加时, 粒子的活跃度降低, 导致随机共振峰值降低. 另外我们还可以看到, 当阻尼系数增加时, OAG 达到峰值时的频率同样在逐渐向 0.6 靠近, 即可能存在一个最优频率使 (系统参数固定时) OAG 达到最优.

4 结 论

本文对一个具有质量涨落的双分数阶耦合振子系统的随机共振进行了研究. 结果显示, 当系统参数固定时, 随着噪声强度、信号频率的变化, 系统 OAG 表现出丰富的 SR 行为. 我们预期所得结果对实际应用可能具有指导意义.

参考文献:

[1] Lanzara E, Mantegna R N, Spagnolo B, *et al.* Ex-

perimental study of a nonlinear system in the presence of noise: the stochastic resonance [J]. *Am J Phys*, 1997, 65: 341.

[2] Wio H S, Lindenberg K. Noise induced phenomena: a sampler [J]. *Amer Inst Phys*, 2003, 658: 1.

[3] Das M, Kantz H. Stochastic resonance and hysteresis in climate with state-dependent fluctuations [J]. *Phys Rev E*, 2020, 101: 62.

[4] Rufener K S, Kauk J, Ruhnau P, *et al.* Inconsistent effects of stochastic resonance on human auditory processing [J]. *Sci Rep-Uk*, 2020, 10: 6419.

[5] Benzi R. Stochastic resonance: from climate to biology [J]. *Nonlinear Proc Geoph*, 2010, 17: 431.

[6] Barik D, Ghosh P K, Ray D S. Langevin dynamics with dichotomous noise; direct simulation and applications [J]. *J Stat Mech-Theory E*, 2006, 3: 03010.

[7] Jiang S Q, Guo F, Zhou Y R, *et al.* Parameter-induced stochastic resonance in an over-damped linear system [J]. *Physica A*, 2007, 375: 483.

[8] Guo F, Wang X Y, Qin M Y. Resonance phenomenon for a nonlinear system with fractional derivative subject to multiplicative and additive noise [J]. *Physica A*, 2021, 562: 125.

[9] 钟苏川, 高仕龙, 马洪, 等. 线性过阻尼分数阶 Langevin 方程的共振行为 [J]. *物理学报*, 2012, 61: 170501.

[10] Soika E, Mankin R. Response of a fractional oscillator to multiplicative trichotomous noise [J]. *Wseas Trans Biol Biomed*, 2010, 7: 21.

[11] Zhong S C, Ma Hong, Peng H, *et al.* Stochastic resonance in a harmonic oscillator with fractional-order external and intrinsic dampings [J]. *Nonlinear*

- Dynam, 2015, 82: 535.
- [12] Yu T, Zhang L, Zhong S C, *et al.* The resonance behavior in two coupled harmonic oscillators with fluctuating mass [J]. Nonlinear Dynam, 2019, 96: 1735.
- [13] Vishwamittar, Batra P, Chopra R. Stochastic resonance in two coupled fractional oscillators with potential and coupling parameters subjected to quadratic asymmetric dichotomous noise [J]. Physica A, 2021, 561: 125148.
- [14] You P L, Lin L F, Wang H Q. Cooperative mechanism of generalized stochastic resonance in a time-delayed fractional oscillator with random fluctuations on both mass and damping [J]. Chaos Solition Fract, 2020, 135: 109789.
- [15] 蔚涛, 张路, 罗懋康. 具有涨落质量的线性谐振子的共振行为 [J]. 物理学报, 2013, 62: 120504.
- [16] Gitterman M, Shapiro I. Stochastic resonance in a harmonic oscillator with random mass subject to asymmetric dichotomous noise [J]. J Stat Phys, 2011, 144: 139.
- [17] Yang S, Deng M, Ren R B. Stochastic resonance of fractional-order Langevin equation driven by periodic modulated noise with mass fluctuation [J]. Adv Differ Equ-Ny, 2020, 2020: 81.
- [18] Gitterman M. Stochastic oscillator with random mass; New type of Brownian motion [J]. Physica A, 2014, 395: 11.
- [19] Huang X P, Lin L F, Wang H Q. Generalized stochastic resonance for a fractional noisy oscillator with random mass and random damping [J]. J Stat Phys, 2020, 178: 1201.
- [20] He L F, Wu X, Zhang G. Stochastic resonance in coupled fractional-order linear harmonic oscillators with damping fluctuation [J]. Physica A, 2020, 545: 123345.
- [21] Ren R B, Luo M K, Deng K. Stochastic resonance in a fractional oscillator subjected to multiplicative trichotomous noise [J]. Nonlinear Dynam, 2017, 90: 379.
- [22] Tu Z, Zhao D Z, Qiu F, *et al.* Stochastic resonance in coupled underdamped harmonic oscillators with fluctuating frequency driven by dichotomous noise [J]. J Stat Phys, 2020, 179: 247.
- [23] Zhang G, Wang H, Zhang T Q. Stochastic resonance research on under-damped nonlinear frequency fluctuation for coupled fractional-order harmonic oscillators [J]. Results Phys, 2020, 17: 103158.
- [24] Wadop Ngouongo Y J, Djolieu Funaye M, Djuidjé Kenmoé G, *et al.* Stochastic resonance in deformable potential with time-delayed feedback [J]. Phil T R Soc A, 2021, 379: 20200234.
- [25] Tian Y, He G T, Liu Z B, *et al.* The impact of memory effect on resonance behavior in a fractional oscillator with small time delay [J]. Physica A, 2021, 563: 125383.
- [26] Ren R B, Deng K. Noise and periodic signal induced stochastic resonance in a Langevin equation with random mass and frequency [J]. Physica A, 2019, 523: 145.
- [27] Burov S, Gitterman M. Noisy oscillator: Random mass and random damping [J]. Phys Rev E, 2016, 94: 052144.
- [28] Yu T, Zhang L, Ji Y D, *et al.* Stochastic resonance of two coupled fractional harmonic oscillators with fluctuating mass [J]. Commun Nonlinear Sci, 2019, 72: 26.
- [29] Zhang L, Xu L, Yu T, *et al.* Collective behavior of a nearest neighbor coupled system in a dichotomous fluctuating potential [J]. Commun Nonlinear Sci, 2021, 93: 105499.
- [30] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II [J]. Geophys J Int, 1967, 13: 529.
- [31] Shapiro V E, Loginov V M. "Formulae of differentiation" and their use for solving stochastic Equations [J]. Physica A, 1978, 91: 563.
- [32] Soika E, Mankin R, Ainsaar A. Resonant behavior of a fractional oscillator with fluctuating frequency [J]. Phys Rev E, 2010, 81: 011141.

引用本文格式:

中 文: 夏伟, 任芮彬, 罗懋康, 等. 具有质量涨落的双分数阶耦合振子系统的随机共振[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2023, 60: 021002.

英 文: Xia W, Ren R B, Luo M K, *et al.* Stochastic resonance of a double fractional coupled oscillator system with mass fluctuation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2023, 60: 021002.