

Duffing-WS 型小世界网络的混沌行为

常博源, 杨京卫, 张 路

(四川大学数学学院, 成都 610064)

摘 要: 近年来, 复杂网络逐渐成为非线性动力系统研究的一个热点. 对复杂网络的混沌行为的产生机制及其对系统参数的依赖进行研究可以为复杂网络的混沌控制提供理论基础. 本文研究了一种新的 Duffing-WS 型小世界网络的混沌行为. 本文首先利用变分法推导其最大李雅普诺夫指数, 并将其作为混沌判据讨论了混沌行为对系统参数的依赖. 结果显示, 该网络具有比单个 Duffing 方程复杂得多的混沌行为.

关键词: 复杂网络; Duffing-WS 型小世界网络; 混沌

中图分类号: O29 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2023.021005

Chaotic behaviors of a Duffing-WS small world network

CHANG Bo-Yuan, YANG Jing-Wei, ZHANG Lu

(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Recently, complex networks become a hot topic of nonlinear dynamical systems. The emergence and parameter dependence of chaotic behaviors is the basis of the chaotic control of a complex network. In this paper, we consider the chaotic behaviors of a new Duffing-WS type small world network. Firstly, we derive an expression for the maximum Lyapunov index by using the variation method. Then we investigate the emergence of chaos by using the Lyapunov index as the criterion. Finally, the dependence of chaotic behaviors on the system parameters is discussed. It is shown that this network possesses more complicated chaotic behaviors than the classic Duffing equation.

Keywords: Complex network; Duffing-WS type small-world network; Chaos

1 引 言

上世纪七八十年代以来, 国际上形成了复杂性科学的研究热潮. 许多复杂性问题都可以归结为复杂网络研究^[1]. 起初, 复杂网络的研究主要集中于规则网络或完全随机网络^[2], 但这两种网络都是理想化模型, 现实场景中的系统则往往介于有序和无序之间, 即小世界网络. 小世界网络通常含有大量的局部连边, 同时也有少量的长程连边. 这些长程连边有效地降低了网络中任意两个节点之间

的距离.

1998 年, Watts 及 Strogatz 提出了经典的 Watts-Strogatz (WS) 型小世界网络模型^[3]. 该网络在规则网络基础上将每条边以概率 p 进行断边重连. 作者利用该模型模拟了传染病在人群中的传播, 发现相较于规则网络, 小世界网络的传播能力明显要快得多. 随后, 众多研究者对各种小世界网络的动力学特性展开了研究^[3-7]. 例如, 2001 年, Zhuo 研究了小世界网络的随机共振现象^[4], 发现其随机共振效应比普通规则网络要强. 2002 年,

收稿日期: 2022-07-11

基金项目: 国家重点研发计划(2020YFA0714000)

作者简介: 常博源(1998—), 男, 山东淄博人, 硕士研究生, 主要研究方向为不确定性处理的数学. E-mail: changboyuan@live.cn

通讯作者: 张路. E-mail: zhanglumail@gmail.com

Hong 等研究了小世界网络的同步性,发现各振子间的同步性随重连概率的增大而显著提高^[5]. 2001 年, Yang 对一个非线性时滞混沌小世界网络进行了研究,发现网络的传播要比规则网络的速度更快^[6]. 2012 年, Ning 提出了一个基于小世界网络的离散复杂网络,研究其分叉和混沌等动力学行为,发现小世界网络的混沌现象在适当的参数下会受到控制^[7].

本文进一步研究小世界网络中的混沌行为. 我们首先提出一个以 WS 小世界网络方式连接的 Duffing 复杂网络(简称 Duffing-WS 型小世界网络),利用变分法推导其最大李雅普诺夫指数,并以庞加莱截面分岔图和李雅普诺夫指数为工具研究该网络是否能产生混沌. 同时,我们还分析了网络重连度 K 、重连概率 p 和耦合强度 ϵ 等对混沌行为的影响. 结果显示, Duffing-WS 型小世界网络的各个粒子输出呈现出小尺度周期运动、倍周期分岔、混沌和大尺度周期运动等多种状态,混沌的参数范围较单个 Duffing 方程更为复杂,且各参数对混沌区的影响也与传统规则网络明显不同.

2 Duffing-WS 型小世界网络

Duffing 方程是当前研究最充分的混沌连续动力系统模型之一,具有丰富的非线性动力学性质^[8]. 经典的规范化 Holmes 型 Duffing 方程

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + ax - bx^3 + A \sin(\Omega t) \quad (1)$$

有三个平衡点: $S = (0, 0)$, $F_1 = (\sqrt{a/b}, 0)$, $F_2 = (-\sqrt{a/b}, 0)$, 其中 F_1, F_2 是稳定焦点, $(0, 0)$ 是不稳定鞍点. 当外加周期驱动力不存在(即 $A = 0$)时,受迫 Holmes 型 Duffing 方程退化为无摄动 Duffing 方程,方程的解 $x(t)$ 将螺旋地(衰减振荡)趋于两个稳定焦点之一,具体趋于哪个焦点由初始条件决定. 在其它参数固定的条件下,周期驱动力的幅值 A 从 0 开始逐渐增加到 1 时,方程的解会经历同宿轨道、分岔、混沌和大尺度周期等各个状态.

在模型(1)的基础上,本文提出如下具有 N 个节点的以 WS 小世界网络方式进行连接的 Duffing 复杂网络,即 Duffing-WS 型小世界网络:

$$\ddot{x}_i = -\gamma \dot{x}_i + ax_i - bx_i^3 + \epsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) + A \sin(\Omega t), i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中 $A \sin(\Omega t)$ 为周期驱动力, $x_i(t)$ 为第 i 个节点的输出, $\epsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i)$ 表示其它节点对第 i 个

节点的耦合作用,称为耦合项, $(a_{ij})_{N \times N}$ 为网络的邻接矩阵, ϵ 为网络耦合强度. 我们采用 Watts 和 Strogatz 提出的 WS 小世界网络作为拓扑网络结构^[3]. 首先, N 个节点连接形成一个规则的相邻网络,每个节点与它最近邻的 K 个节点相连, K 称为重连度,此后以概率 p (称为重连概率)随机地重新连接网络中的每条边,即将边的一个端点保持不变,而另一个端点取为随机选择的一个节点,且规定任意两个不同的节点之间至多只能有一条边,每一个节点都不能有边与自身相连. 对于 WS 小世界网络而言,当 $p = 0$ 时网络为规则网,当 $p = 1$ 时为随机网,当 $0 < p < 1$ 时则得到介于规则网络与随机网络之间的小世界网络.

引入 Laplacian 矩阵 $L = (l_{ij})_{N \times N}$,

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j \\ \sum_{j \neq i} a_{ij}, & i = j \end{cases}$$

后,方程(2)可以改写为

$$\ddot{x}_i = -\gamma \dot{x}_i + ax_i - bx_i^3 + A \sin(\Omega t) - \epsilon \sum_{j=1}^N l_{ij} x_j \quad (3)$$

由 Laplacian 矩阵的性质可知, L 是一个实对称的弱对角占优矩阵,其对角元均非负,因而是半正定的.

3 Duffing-WS 型小世界网络的混沌行为

3.1 分岔图

当驱动力幅度 A 值在 $(0, 1)$ 范围变化时,随 A 值的变化,网络中的各个粒子的输出也将呈现小尺度周期运动、倍周期分岔,混沌和大尺度周期运动等不同状态. 我们首先借助庞加莱截面给出该网络的分岔图. 取庞加莱截面为 $t = jT$, $T = 2\pi/\Omega$, 我们在此截面上引入宏观变量

$$\sigma(jT) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(jT) \quad (4)$$

来描述系统的集体行为. 作为对比,图 1a 给出了借助于庞加莱截面的单个 Duffing 方程(1)的解随驱动力幅度 A 变化的分岔图,图 1b 则给出了借助 $\sigma(jT)$ 、节点个数为 $N = 100$ 的 Duffing-WS 型小世界网络关于幅度 A 的变化的分岔图. 对比可知,后者的分岔图也经历了小尺度周期运动、倍周期分岔,混沌和大尺度周期运动等状态,并在大尺度周期状态之后又进入了短暂的混沌状态,但具体细节更为复杂.

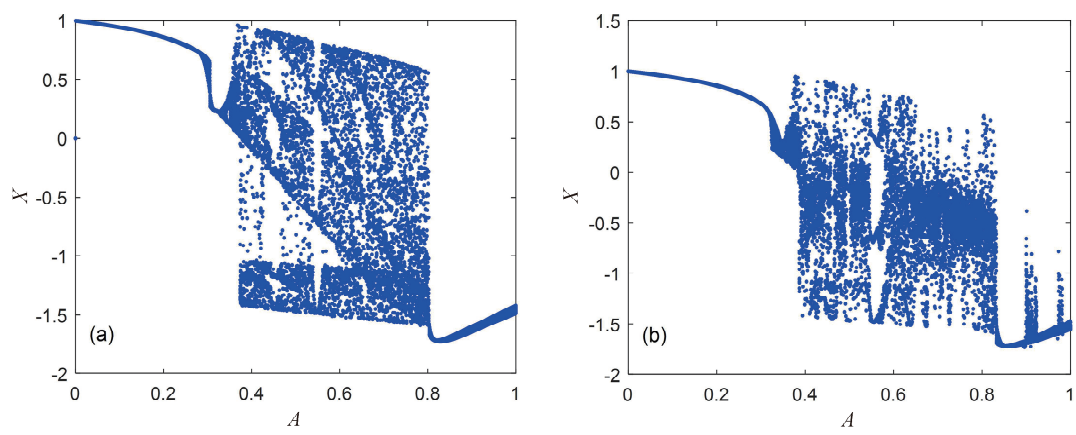


图 1 Duffing 方程(a)及 Duffing-WS 型小世界网络(b)的输出关于参数 A 的分岔
Fig. 1 Bifurcations of (a) Duffing equation and (b) Duffing-WS small world network on the parameter A

3.2 最大 LE 指数

从 3.1 节可以看到,从分岔图往往难以定量地分析系统的混沌行为. 混沌分析的另一个指标是系统的最大 Lyapunov 指数(LE 指数)^[9],LE 刻画了系统在相空间中相邻轨道间收缩或发散的平均指数率. 系统是否存在混沌可以从最大 LE 指数是否大于零直观地判断出来,正的 LE 指数意味着混沌的出现.

下面我们利用变分法推导 Duffing-WS 型小世界网络的最大 LE 指数. 令 $z_i = \Omega t, z_i|_{t=0}$, 可将非自治方程(3)变成自治方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = -\gamma y_i + ax_i - bx_i^3 + A\sin(z_i) - \epsilon \sum_{j=1}^N l_{ij}x_j, \\ \dot{z}_i = \Omega \end{cases}$$

(5)

假设 $s(t)$ 是单个 Duffing 方程(1)的解. 我们引入变分 $\delta_{xi} = x_i(t) - s(t), \delta_{yi} = y_i(t) - \dot{s}(t)$, 得到模型的变分方程

$$\begin{cases} \delta_{xi} = \delta_{yi}, \\ \delta_{yi} = -\gamma \delta_{yi} + a\delta_{xi} - 3bx_i^2\delta_{xi} + A\cos(z_i)\delta_{xi} - \epsilon \sum_{j=1}^N l_{ij}\delta_{xj}, \\ \delta_{zi} = 0 \end{cases}$$

(6)

不失一般性,在上述变分方程(6)中令集合 $\delta_{zi} = 0$, 则方程(6)简化为

$$\begin{cases} \delta_{xi} = \delta_{yi}, \\ \delta_{yi} = -\gamma \delta_{yi} + a\delta_{xi} - 3bx_i^2\delta_{xi} - \epsilon \sum_{j=1}^N l_{ij}\delta_{xj} \end{cases}$$

(7)

模型的最大 LE 指数表达式为

$$\lambda_{\max} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\sqrt{\sum_{i=1}^N |\delta_{xi}(T)| + |\delta_{yi}(T)|}\right)}{T}$$

(8)

利用上式,我们来计算不同参数组合下模型的平均最大 LE 指数(即多次仿真得到的模型的最大 LE 指数的平均值,这里的仿真次数取为 50 次)关于幅度 A 的变化曲线. 其中 LE 指数大于 0 的区域视为系统处于混沌区,粒子个数固定为 $N = 100$, 每条曲线均是对 50 个样本的轨道平均,Duffing 方程中的参数固定为 $a = 1, b = 1, \gamma = 0.5, \Omega = 1$. Duffing-WS 型小世界网络及其对于变分方程组(7)的数值模拟基于常微分方程的 4 阶龙格库塔算法.

3.3 耦合强度 ϵ 对混沌区的影响

图 2a~2c 给出了不同的耦合强度 ϵ 下平均最大 LE 指数随幅度 A 的变化曲线,重连概率均为 $p = 0.5$. 在图 2a 中 $K = 2$, 可以见到当耦合强度 ϵ 较小时(如 $\epsilon = 0, 0.2, 0.4$),混沌区随 ϵ 的增大而扩大;当耦合强度 ϵ 较大(如 $\epsilon = 0.6, 0.8, 1, 2$)时,混沌区随 ϵ 的增加逐渐收缩,混沌受到抑制. 这种情况是由于重连度非常小,节点之间的连接程度不够,小耦合强度的增强反而增强了系统的混沌运动. 反之,只有耦合强度大到一定程度,更大的耦合强度使得系统协同性增强之后,才能抑制系统的混沌运动.

在图 2b 中 $K = 20$, 可以看到,当 $\epsilon = 0$ 时,小世界网络退化成独立的 N 个 Duffing 系统,此时混沌区最大;当 $\epsilon > 0$ 时,小世界网络各个节点之间存在耦合作用,网络的混沌区收缩. 此时由于重连度 K 值较大,平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线在不同的耦合强度 ϵ 下基本一致,即此时小世界网

络的混沌区对耦合强度 ϵ 具有鲁棒性. 在图 2c 中 $K=48$, 同样可以看到, 混沌区随 ϵ 增加的变化同样不明显.

综上, 不同于传统的规则网络, Duffing-WS 型

小世界网络的耦合强度 ϵ 对混沌区的影响是非线性的, 当重连度 K 较小时混沌区随耦合强度的增加先扩大后缩小, K 较大时 ϵ 的增强对混沌区域影响则不明显.

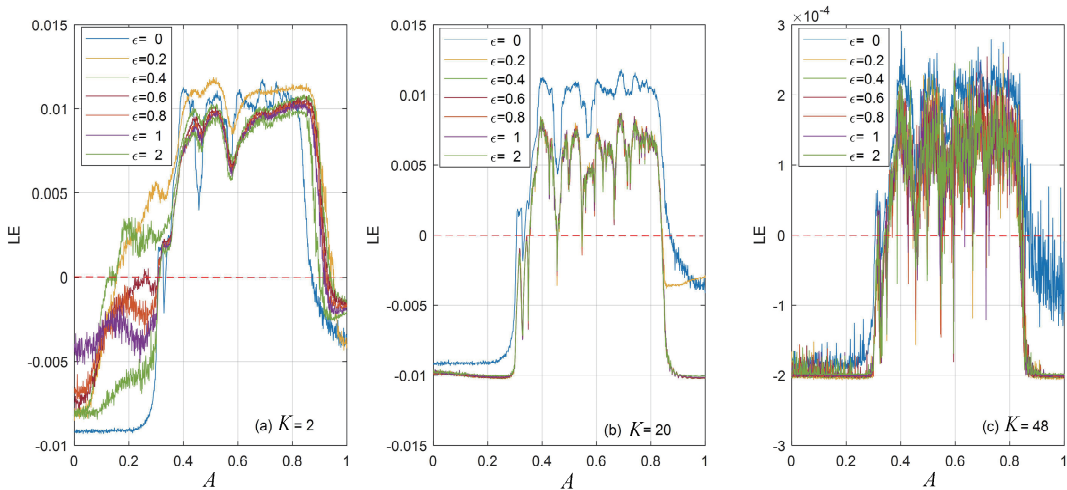


图 2 不同耦合强度下平均 LE 指数随幅度的变化曲线: (a) $K=2$; (b) $K=20$; (c) $K=48$

Fig. 2 Average LE as a function of the amplitude at different coupling strengths; (a) $K=2$; (b) $K=20$; (c) $K=48$

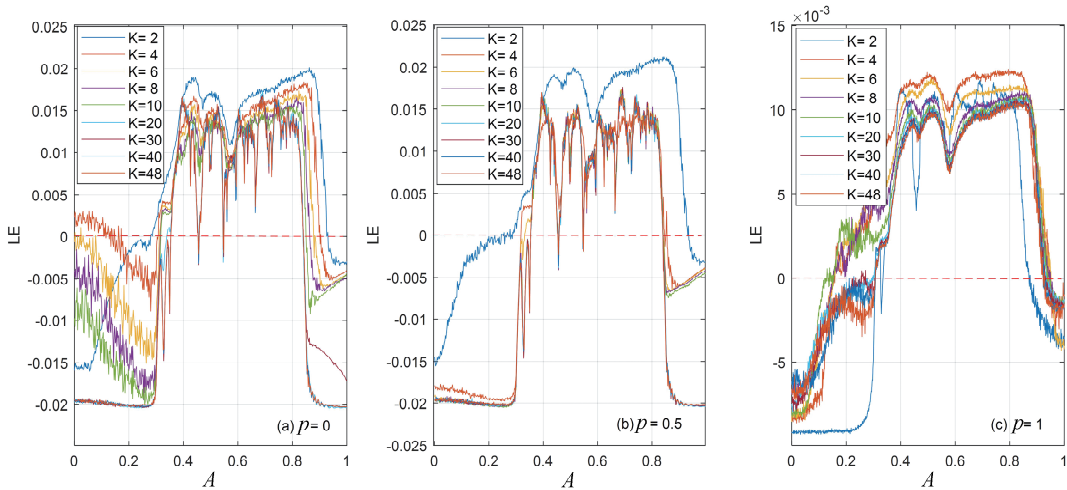


图 3 不同重连度下平均 LE 指数随周期幅度的变化曲线: (a) $p=0$; (b) $p=0.5$; (c) $p=1$

Fig. 3 Average LE as a function of the amplitude at different reconnection degrees; (a) $p=0$; (b) $p=0.5$; (c) $p=1$

3.4 重连度 K 对混沌的影响

图 3a~3c 给出了不同重连度 K 下平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 耦合强度均为 $\epsilon=0.5$. 在图 3a 中, $p=0$, 耦合网络为规则的最近邻耦合网络. 可以看到, 当重连度 K 较小时 ($K=2, 4, 6, 8, 10$), 随着重连度 K 的增加, LE 指数大于 0 的混沌区先扩大后收缩, 当 $K=4$ 时混沌区达到最大; 随后, 当重连度 K 增加到一定程度后 ($K=20, 30, 40, 48$), 混沌区随着 K 值的增加而有略微地缩小, 但总体上差异不大. 这说明, 对于规则网络只有足够大的重连度才会抑制系统混沌, 较小的重连度反而增加系统的混沌运动.

在图 3b 中, $p=0.5$, 此时网络为标准的小世界模型. 当 $K=2$ 时, LE 曲线所对应的混沌区最大, LE 指数在各个振幅处的值也最高, 可见重连度 K 较低时更容易产生较大的混沌区. 当 $K=4, 6$ 时, 相比 $K=2$ 的 LE 曲线, 其大于 0 的区域明显缩小, 即重连度的增加明显抑制网络的混沌运动; 随着 K 值进一步增加, 系统 LE 曲线几乎没有变化. 这是因为当重连度足够高时系统各节点输出间差异很小, 混沌区几乎一致.

在图 3c 中, $p=1$, 此时网络为完全的随机网络. 可以看出, K 足够大时 LE 曲线的一致性会被打破, 重连度对混沌区的控制作用不再呈现明显规

律. 当 $K=2$ 时, 混沌区反而最小, 而中间大小的重连度 ($K=4, 6, 8, 10$) 混沌区却较大. 同时, 对比完全规则网络 ($p=0$) 与小世界网络 ($p=0.5$), 完全随机网络的混沌区更大且 LE 指数更低.

综上, 类似于完全规则的网络, Duffing-WS 型小世界网络当重连度 K 越大时混沌区越小, 即 K 的增大同样对混沌控制起积极作用, 但 K 增大到一定程度之后这种抑制效果不再明显. 对于随机网络, 重连度 K 对其混沌区的影响也呈现非单调性.

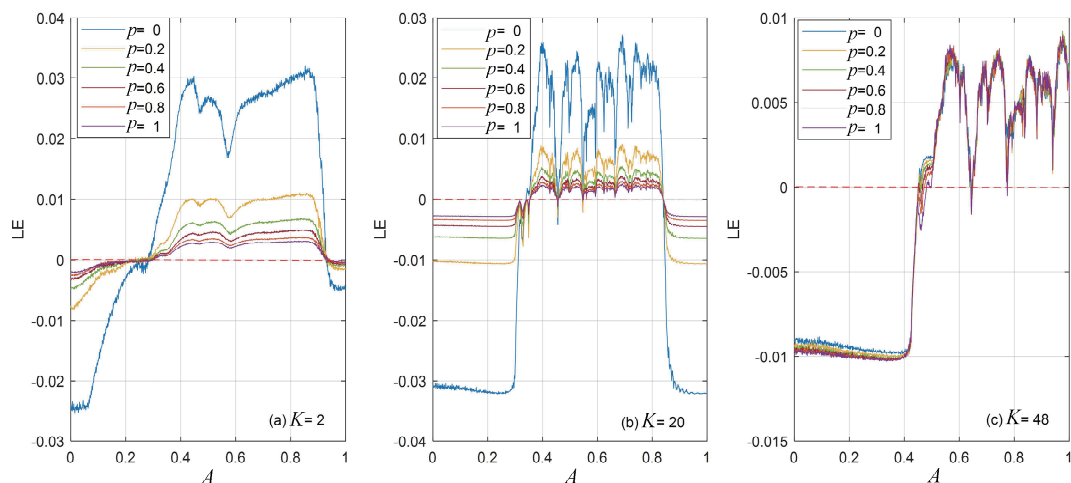


图 4 不同的重连概率下平均 LE 指数随幅度的变化曲线: (a) $K=2$; (b) $K=20$; (c) $K=48$

Fig. 4 Average LE as a function of the amplitude under different reconnection probabilities: (a) $K=2$; (b) $K=20$; (c) $K=48$

4 结 论

本文研究了一种新的 Duffing-WS 型小世界网络模型的混沌行为, 通过变分法计算其最大李雅普诺夫指数, 进而分析了不同参数对其混沌区的影响. 我们发现, Duffing-WS 型小世界网络具有比单个 Duffing-方程更为复杂的混沌行为, 且系统重连概率、重连度以及耦合强度对系统混沌区域的影响也有别于传统的规则网络.

(i) 网络耦合强度 ϵ 对混沌区的影响并不是单调的. 当网络重连度 K 较小时, 耦合强度的增强反而会促进系统的混沌. 只有在重连度 K 增大到一定程度之后, 较强的耦合强度才会对混沌起到控制作用, 但是当重连度 K 足够大后系统再次产生混沌.

(ii) 网络重连度 K 在不同重连概率 p 下对混沌有明显的影响. 对于规则网络 ($p=0$) 和小世界网络 ($0 < p < 1$), 足够大的重连度会抑制系统的混沌, 较小的重连度则促进系统的混沌运动. 与前面

3.5 重连概率 p 对混沌的影响

图 4a~4c 给出了不同的重连概率 p 下平均 LE 指数随幅度 A 变化的曲线, 耦合强度均为 $\epsilon=0.5$. 在图 4a 中, $K=2$, 在图 4b 中 $K=20$, 可以看到, 不同重连概率 p 对混沌区的影响不明显, 差异主要体现在 LE 指数的高低上, 重连概率 p 越大, LE 指数值越小. 在图 4a 中, $K=48$, 这种情形下混沌区明显后移. 总的来说, 此时小世界网络的混沌区对重连概率 p 具有鲁棒性.

两种网络相比, 完全随机网络 ($p=1$) 的混沌区则更大, 重连度 K 对其混沌区的影响也呈现非单调性, 随着重连度 K 的增加, 其混沌区先增加后减小.

(iii) 网络重连概率 p 对复杂网络混沌区的影响不明显.

参考文献:

- [1] Newman M E J. Networks [M]. New York: Oxford University Press, 2018.
- [2] Buchanan M, Aldanogonzales M. Small worlds and the groundbreaking theory of networks [M]. New York: Norton, W. W. & Company, Inc, 2003.
- [3] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks [J]. Nature, 1998, 393:440.
- [4] Gao Z, Hu B, Hu G. Stochastic resonance of small-world networks [J]. Phys Rev E, 2001, 65: 016209.
- [5] Hong H, Choi M Y, Kim B J. Synchronization on small-world networks [J]. Phys Rev E, 2002,

65: 026139.

[6] Yang X S. Chaos in small-world networks [J]. Phys Rev E, 2001, 63: 046206.

[7] Ning L, Sun H Y, Zhang Q L. Bifurcations and chaos control in discrete small-world networks [J]. Chinese Phys B, 2012, 21: 010503.

[8] Akhmet M U, Fen M O. Chaotic period-doubling and OGY control for the forced Duffing equation [J]. Commun Nonlinear Sci, 2012, 17: 1929.

[9] Steeb W H. 非线性系统手册[M]. 徐玉秀, 译. 北京: 电子工业出版社, 2013.

引用本文格式:

中 文: 常博源, 杨京卫, 张路. Duffing-WS 型小世界网络的混沌行为[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2023, 60: 021005.

英 文: Chang B Y, Yang J W, Zhang L. Chaotic behaviors of a Duffing-WS small world network [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2023, 60: 021005.