

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.01.001

# 非对称噪声驱动的 Langevin 谐振子的随机共振

丛雪, 邓科

(四川大学数学学院, 成都 610064)

**摘要:** 本文研究了周期调制噪声和非对称双态噪声联合驱动下的具有频率涨落的谐振子的随机共振. 本文的主要工作是通过 Shapiro-Logniov 公式求解谐振子系统的稳态响应一阶矩的解析表达式, 并且推导谐振子系统的稳态响应一阶矩的稳定性条件, 进而发现了系统关于不同参数的广义随机共振现象, 如双峰共振现象等丰富的动力学行为.

**关键词:** Langevin 谐振子模型; 非对称噪声; 随机共振; Shapiro-Logniov 公式

**中图分类号:** O29      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0490-6756(2018)01-0001-06

## Stochastic resonance of a Langevin oscillator with fluctuating frequency induced by asymmetric noise

CONG Xue, DENG Ke

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract:** In this paper, we focus on the stochastic resonance behaviors of a Langevin oscillator with fluctuating frequency induced by both periodically modulated noise and asymmetric noise. By using the Shapiro-Logniov formula, analytical expression of the first moment of the stable response is calculated. Then, stable conditions of the first moment are obtained and the stochastic resonance behaviors of the oscillator are elucidated.

**Keywords:** Langevin oscillator; Asymmetric noise; Stochastic resonance; Shapiro-Logniov formula

## 1 引言

随机共振是以随机动力系统、统计物理等理论为数学基础, 研究动力系统的参数、相关噪声以及周期信号之间非单调的协作效应<sup>[1-19]</sup>. 与经典的噪声理论相悖, 通常我们认为噪声在系统中总是起着消极的负面作用, 但随着相关研究的深入, 在许多学科领域, 例如物理, 化学, 生物等, 专家学者们逐渐意识到噪声在随机动力系统中的作用不单如此, 甚至于可以起到积极的、正面的作用. 随机共振现象 (stochastic resonance, SR) 的概念最早是由 Benzi<sup>[1]</sup> 和 Nicolis 等在解释古气象中冰川冷暖周

期性变化的气候问题而首次提出来的. 研究说明了在冰川冷暖气变化期间, 太阳给地球施加了一个周期力. 然而这个周期力较弱, 并不足以引起气候温度将近 10K(平均值)的变化<sup>[2]</sup>, 所以 Benzi 等人认为地球短时天气变化也影响了冰川冷暖周期交替. 即冰川冷暖周期交替是由于太阳施加的长时间周期力和短时随机天气变化共同作用的结果. 继而, Benzi 提出了一个非线性双稳态数学模型. 而这种由太阳给地球施加的弱周期力和短时天气变化的随机力共同作用而导致的强周期温度变化的现象称为随机共振. 随机共振现象不仅仅存在于冰川冷暖周期交替的气象学中, 研究表明, 随机共振现象

收稿日期: 2017-04-20

基金项目: 国家自然科学基金(11301361)

作者简介: 丛雪(1992-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为不确定性处理的数学. E-mail: congxue2014@163.com

通讯作者: 邓科. E-mail: dk\_83@126.com

还出现在其他的系统<sup>[3]</sup>.

自从 Benzi 等人发现了非线性双稳态系统可以产生随机共振现象后,有大量文献探讨双稳态系统的随机共振现象<sup>[4]</sup>.然而近期研究表明,随机共振现象既可以发生在传统的弱周期信号和噪声驱动下的非线性双稳态系统中,随机共振现象又可以发生在单稳态无周期驱动的非线性系统.此外,有学者研究发现在某些线性系统中随机共振现象也可以发生.

由于简谐振子是自然界中经典的线性物理模型,所以简谐振子的随机共振研究受到了学者们的广泛关注. Berdichevsky 和 Gitterman<sup>[5]</sup>经研究发现色噪声环境下的谐振子系统存在丰富的随机共振行为.2004年, Gitterman<sup>[6]</sup>研究了色噪声驱动的具有阻尼涨落的简谐振子系统,发现强噪声会导致简谐系统的不稳定现象.2010年, Romi 等发现了在噪声影响下,频率涨落简谐振子系统会产生丰富的随机共振现象.并且发现了系统输出信噪比(SNR)和噪声之间会产生一种非线性关系.2012年,张璐等研究了乘性二次噪声驱动的线性过阻尼振子的随机共振现象,推导了系统的一、二阶稳态矩,并且进行了实验仿真<sup>[7]</sup>.2014年,田祥友,冷永刚等<sup>[8]</sup>分析了一阶线性系统在正弦和白噪声信号作用下的输出功率谱和信噪比,研究表明,加性噪声作用下的线性系统不存在传统意义上的随机共振,但却存在输出信噪比随系统参数非单调变化的调参广义随机共振现象,针对任意频率信号,分析了不同采样频率下的调参共振谱特性,得出适当增大采样频率有利于特征信号识别的结论.虽然前人已经对谐振子系统的随机共振现象有着大量的研究<sup>[9,10,13]</sup>,但是对具有频率涨落的简谐振子的随机共振现象研究并不完善.本文的一个主要工作就是研究具有频率涨落的简谐振子的随机共振现象.

在一些实际系统中,经常会出现周期调制噪声.例如在光学或射电天文学等领域中,需要使用周期信号调制噪声. Dykman<sup>[19]</sup>等研究了具有周期调制噪声的非对称双稳态系统.此外, Wang 等<sup>[16]</sup>研究了单模激光模型,并考虑了周期调制噪声对系统的影响.2008年,靳艳飞<sup>[12]</sup>等研究了周期调制噪声下的线性阻尼振子,观察了系统的随机共振现象.从而,本文的一个主要工作是考虑频率涨落的简谐振子模型在周期调制噪声和非对称双态噪声共同作用下的随机共振现象.

## 2 Langevin 方程模型

简谐振子是自然界中最简单的物理模型之一,设  $x(t)$  是粒子的运动路径,考虑受到周期调制噪声和非对称双态噪声共同驱动的随机动力学系统,则用如下方程描述:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + m\omega^2 [1 + \xi(t)]x = A_0 \cos(\Omega t) \xi(t) + \eta(t),$$

其中,  $\xi(t), \eta(t)$  均是非对称双态噪声.为了计算简便,在这里,我们假设  $m = 1$ , 即

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 [1 + \xi(t)]x = A_0 \cos(\Omega t) \xi(t) + \eta(t) \quad (1)$$

$\xi(t)$  是非对称双态噪声,则  $\xi(t)$  是一个双值随机过程,记  $A_1, -B_1 (A_1 \neq B_1)$  分别为  $\xi(t)$  的两个值,定义从  $A_1$  到  $-B_1$  的转换率为  $\tau_1$ , 而从  $-B_1$  到  $A_1$  的转换率为  $\tau_2$ , 则有如下等式成立<sup>[14]</sup>:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \tau_1 A_1 - \tau_2 B_1 = 0, \\ \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle &= \sigma_1^2 \lambda \exp[-\lambda |t_1 - t_2|], \\ \lambda &= \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}. \end{aligned}$$

并且,  $\xi(t)$  的二次噪声可以分解为

$$\xi^2(t) = \sigma_1^2 + \Delta_1 \xi(t),$$

其中  $\Delta_1 = A_1 - B_1$  为  $\xi(t)$  的非对称(Asymmetry).

同样地,将 Langevin 方程中的加性噪声  $\eta(t)$  也建模为非对称双态噪声.则

$$\begin{aligned} \eta(t) &\in \{A_2, -B_2\}, \\ \langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle &= \mu \sigma_2^2 \exp[-\mu |t_1 - t_2|], \\ \eta(t)^2 &= \sigma_2^2 + \Delta_2 \eta(t), \Delta_2 = A_2 - B_2. \end{aligned}$$

然而,在大多数物理系统中,系统的内外噪声都是相关联的,从而,我们考虑  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  两个噪声相关联的情况,即

$$\langle \xi(t_1) \eta(t_2) \rangle = D \delta(t_2 - t_1).$$

## 3 系统的稳态响应一阶矩及其稳定性条件

下面根据 Shapiro-Loginov 公式解析求解系统输出响应的一阶矩.首先,将谐振子模型拆分成下面的微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} + \gamma y + \omega^2 [1 + \xi(t)]x &= \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_0 \cos(\Omega t) \xi(t) + \eta(t) \quad (3)$$

然后分别将两个方程求平均, 得到

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle y \rangle \quad (4)$$

$$\frac{d\langle y \rangle}{dt} = -\gamma \langle y \rangle - \omega^2 \langle x \rangle - \omega^2 \langle \xi x \rangle \quad (5)$$

运用 Shapiro-Loginov 公式

$$\frac{d\langle \xi x \rangle}{dt} = \langle \xi y \rangle - \lambda \langle \xi x \rangle \quad (6)$$

由于上式中含有一个新的变量  $\langle \xi y \rangle$ , 为了求解方程, 我们还需要另一个包含  $\langle \xi y \rangle$  的等式. 于是将式(2)、(3)左右两端同时乘以  $\xi(t)$ , 将得到的等式两端取平均再用 Shapiro-Loginov 公式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi y \rangle}{dt} = & -(\gamma + \lambda) \langle \xi y \rangle - \omega^2 \langle \xi x \rangle - \\ & \omega^2 \langle \xi^2 x \rangle + A_0 \cos(\Omega t) \langle \xi^2 \rangle + \langle \xi \eta \rangle. \end{aligned}$$

从前面的分析可以知道, 分别用  $\sigma_1^2 \langle x \rangle + \Delta_1 \langle \xi x \rangle$ ,  $D$  替代  $\langle \xi^2 x \rangle$ ,  $\langle \xi \eta \rangle$  可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi y \rangle}{dt} = & -(\gamma + \lambda) \langle \xi y \rangle - (\omega^2 + \omega^2 \Delta_1) \langle \xi x \rangle - \\ & \omega^2 \sigma_1^2 \langle x \rangle + A_0 \sigma_1^2 \cos(\Omega t) + D \end{aligned} \quad (7)$$

为了化简表达式, 联立所得方程, 令  $x_1 = \langle x \rangle$ ,  $x_2 = \langle \xi x \rangle$ , 我们得到了一下关于变量  $x_1, x_2$  的方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\gamma \frac{dx_1}{dt} - \omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -(\gamma + 2\lambda) \frac{dx_2}{dt} - (\lambda^2 + \lambda\gamma + \omega^2 + \omega^2 \Delta_1) x_2 - \omega^2 \sigma_1^2 x_1 + A_0 \sigma_1^2 \cos(\Omega t) + D \end{cases} \quad (8)$$

然后对方程组做 Laplace 变换, 得:

$$\begin{cases} d_{11} X_1 + d_{12} X_2 = d_{13}, \\ d_{21} X_1 + d_{22} X_2 = A_0 \sigma_1^2 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} + \frac{D}{s} + d_{23} \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} d_{11} &= s^2 + \gamma s + \omega^2, d_{12} = \omega^2, \\ d_{13} &= s x_1(0^-) + x_1'(0^-) + \gamma x_1(0^-), \\ d_{21} &= \omega^2 \sigma_1^2, \\ d_{22} &= s^2 + 2\lambda s + \gamma s + \lambda^2 + \lambda\gamma + \omega^2 + \omega^2 \Delta_1, \\ d_{23} &= s x_2(0^-) + x_2'(0^-) + (\gamma + 2\lambda) x_2(0^-). \end{aligned}$$

这里,  $x_1(0^-), x_1'(0^-), x_2(0^-), x_2'(0^-)$  为相应的初值条件,  $X_i$  表示  $x_i$  的 Laplace 变换.

求解方程组后得到

$$\begin{cases} X_1 = \frac{d_{12}}{d_{21} d_{12} - d_{11} d_{22}} (A_0 \sigma_1^2 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} + \frac{D}{s}) + \frac{d_{13} d_{22} - d_{12} d_{23}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}, \\ X_2 = \frac{d_{11}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}} (A_0 \sigma_1^2 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} + \frac{D}{s}) + \frac{d_{13} d_{21} - d_{23} d_{11}}{d_{21} d_{12} - d_{11} d_{22}} \end{cases} \quad (10)$$

令  $x_3(0) = x_1'(0), x_4(0) = x_2'(0)$ . 对上式得到的解做 Laplace 逆变换可得

$$\begin{aligned} x_i(t) &= A_0 \sigma_1^2 \int_0^t h_{i0}(t - \tau) \cos(\Omega \tau) d\tau + \\ & \sum_{k=1}^4 h_{ik}(t) x_k(0), i = 1, 2 \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\mathcal{L}\{h_k(t)\} = H_k(s), k = 0, 1, \dots, 4$  可以由方程组(10)确定, 特别地,  $H_{i0}$  为系统传递函数, 且

$$\begin{aligned} H_{10}(s) &= \frac{d_{12}}{d_{21} d_{12} - d_{11} d_{22}}, \\ H_{20}(s) &= \frac{d_{11}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}} \end{aligned} \quad (12)$$

在解的表达式(11)中, 若  $t \rightarrow \infty$ , 即经过长时间演化, 系统响应对初始条件的依赖性逐渐消失, 系统逐步进入稳定状态, 此时, 系统稳态响应一阶矩为:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle_{as} &= \langle x(t) \rangle |_{t \rightarrow \infty} = \\ & A_0 \sigma_1^2 \int_0^t h_{i0}(t - \tau) \cos(\Omega \tau) d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

从信号与系统的角度,  $\langle x(t) \rangle_{as}$  可看作正弦信号  $A_0 \cos(\Omega t)$  经传递函数  $H_{10}$  的线性时不变系统作用后的输出, 因而可以进一步表示为:

$$\langle x(t) \rangle_{as} = A \cos(\Omega t + \varphi) \quad (14)$$

其中,  $A$  和  $\varphi$  分别表示系统稳态响应的振幅和相移, 则

$$A = A_0 \sigma_1^2 |H_{10}(j\Omega)|, \varphi = \arg(H_{10}(j\Omega)) \quad (15)$$

从而得到  $A$  与  $\varphi$  的解析表达式为:

$$A = \frac{A_0 \omega^2 \sigma_1^2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \varphi = -\arctan \frac{f_2}{f_1} \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1 &= \omega^4 \sigma_1^2 - \omega^2 \lambda^2 - \omega^2 \lambda \gamma - \omega^4 - \omega^4 \Delta_1 - \Omega^4 + \\ & (\lambda^2 + \lambda\gamma + \omega^2 + \omega^2 \Delta_1 + 2\lambda\gamma + \gamma^2 + \omega^2) \Omega^2, \\ f_2 &= -(\lambda^2 \gamma + \lambda\gamma^2 + \omega^2 \gamma + \omega^2 \Delta_1 \gamma + 2\omega^2 \lambda + \\ & \omega^2 \gamma) \Omega + (2\lambda + 2\gamma) \Omega^3. \end{aligned}$$

稳定性是研究线性系统最重要的问题之一. 在本文中, 若系统响应一阶矩发散, 这意味着该随机系统在长时极限下不能达到一个稳定状态. 为了使研究结果可以运用到实际中, 切实的指导实际问

题,对系统稳定性的研究显然是必要的. 一个普遍的研究系统稳定性的方法是 Lyapunov 指数判别法,而对于一个线性时不变系统,系统稳定的充分必要条件是它的系数特征方程的所有特征根均为负实数,或具有负的实数部分. 为此我们用经典的 Routh-Hurwitz 判据.

首先,根据前面的方程,得到一个如下的四阶微分方程:

$$a_4 \frac{d^4 \langle x \rangle}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 \langle x \rangle}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + a_0 \langle x \rangle = c_1 \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} a_4 &= 1, a_3 = 2(\gamma + \lambda), \\ a_2 &= 2\omega^2 + \gamma^2 + 3\gamma\lambda + \lambda^2 + \omega^2 \Delta_1, \\ a_1 &= 2\omega^2(\gamma + \lambda) + \omega^2 \Delta_1 \gamma + \gamma\lambda(\gamma + \lambda), \\ a_0 &= \omega^2 \lambda(\gamma + \lambda) + \omega^4(1 - \sigma_1^2) + \omega^4 \Delta_1, \\ c_1 &= -A_0 \sigma_1^2 \omega^2 \cos(\Omega t) - D\omega^2. \end{aligned}$$

根据系统经典的 Routh-Hurwitz 判据,经计算后,可得本文所研究的线性谐振子系统的响应一阶矩稳定的条件为:

$$\begin{aligned} \forall a_i > 0; a_3 a_2 - a_1 > 0; \\ a_3(a_1 a_2 - a_3 a_0) - a_0^2 > 0. \end{aligned}$$

值得注意的是,本文后续的仿真参数选取是建立在上述稳定性条件成立的前提之下的.

## 4 讨论和数值结果

### 4.1 稳态响应一阶矩振幅关于输入信号频率的随机共振现象

在本节中,我们将给出稳态响应振幅  $A$  关于输入信号频率的随机共振现象,根据前文的结果可

以看到稳态响应振幅  $A$  是由乘性非对称双态噪声的噪声强度  $\sigma_1$ 、非对称性  $\Delta_1$  和相关率  $\lambda$ , 系统固有频率  $\omega$ , 外部驱动频率  $\Omega$  等参数共同决定的. 于是我们可以通过计算机模拟,直观的讨论稳态响应振幅  $A$  和这些参数之前的关系以及它们之间的真实随机共振行为.

图 1 给出了关于阻尼系数  $\gamma$  的  $A-\Omega$  变化曲线. 图中显示出,当  $\gamma$  取一个较小值时,系统有明显的随机共振现象,而当阻尼系数过大时,系统不发生随机共振. 图 2 给出了在参数  $\lambda$  不同时,  $A-\Omega$  的变化曲线. 经对比发现,相关率较小时系统呈现明显的随机共振变化. 根据相关率的定义  $\lambda = 1/(\tau_1 + \tau_2)$  可以知道,当非对称双态噪声的转换率较大的时候,系统易发生随机共振现象. 图 3 给出了在参数不对称性  $\Delta_1$  变化的情况下,  $A-\Omega$  变化曲线. 经对比发现,不对称性  $\Delta_1$  越小,随机共振的共振峰值越大,随机共振现象越明显. 而且,随着不对称性的增加,共振峰的位置向右偏移. 图 4 给出了关于输入信号强度  $A_0$  变化的随机共振现象,值得注意的是,输入信号强度越大,共振峰峰值越高,但共振峰的位置几乎不受影响. 在  $A_0 = 0.5$  时,几乎没有随机共振现象发生.

### 4.2 稳态响应振幅关于非对称双态噪声强度的随机共振现象

在本节中,我们将给出在不同的参数条件下,稳态响应振幅  $A$  关于双态噪声强度  $\sigma_1$  的随机共振数值仿真结果. 本文给出了参数相关率  $\lambda$ , 阻尼系数  $\gamma$ , 非对称性  $\Delta_1$  及系统固有频率  $\omega$  的仿真曲线图,并且根据仿真结果,直观的讨论稳态响应振幅  $A$  和这些参数之前的关系以及它们之间的随机共振行为.

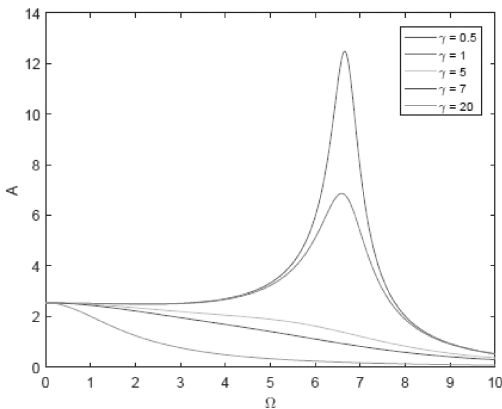


图 1 振幅关于驱动频率的变化  
Fig. 1 Amplitude vs frequency

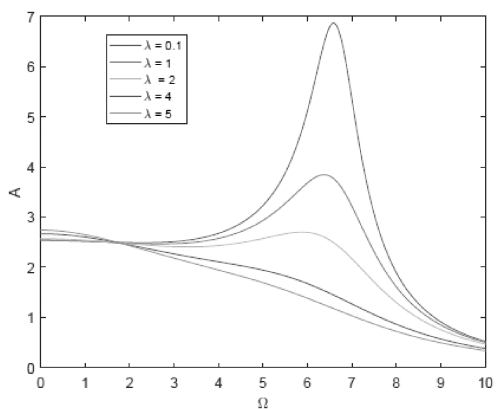


图 2 相关率关于驱动频率的变化  
Fig. 2 Related rate vs frequency

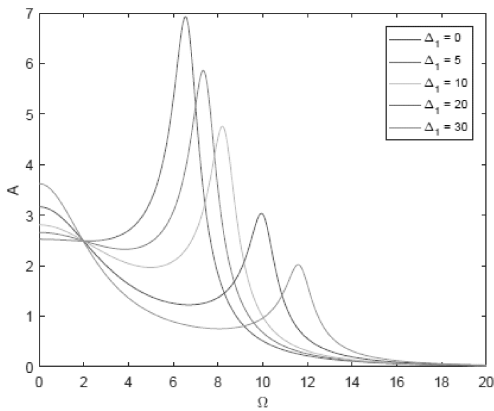


图 3 振幅关于驱动频率的变化  
Fig. 3 Amplitude vs frequency

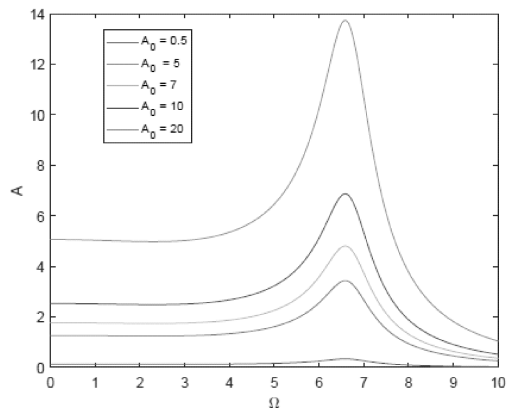


图 4 振幅关于驱动频率的变化  
Fig. 4 Amplitude vs frequency

图 5 给出了关于阻尼系数  $\gamma$  的  $A-\sigma_1$  变化曲线. 图中显示出, 当  $\gamma$  取一个较小值时, 系统有明显的随机共振现象, 而当阻尼系数过大时, 系统不发生随机共振. 但在  $\sigma_1$  逐渐增加后, 系统的稳态响应振幅趋于一个固定值. 图 6 给出了不同参数下的

$A-\sigma_1$  变化曲线, 经对比发现, 随着  $\lambda$  从 0~10 的增加, 共振峰的峰值先减小后增加, 在  $\lambda = 2$  左右达到一个低谷, 而且共振峰的位置随着  $\lambda$  的增加逐渐向右移动.

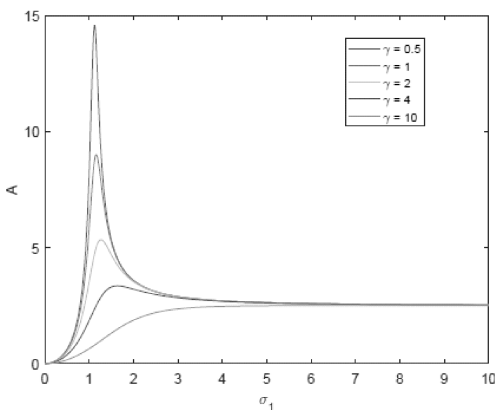


图 5 振幅关于双态噪声强度的变化  
Fig. 5 Amplitude vs strength of noise

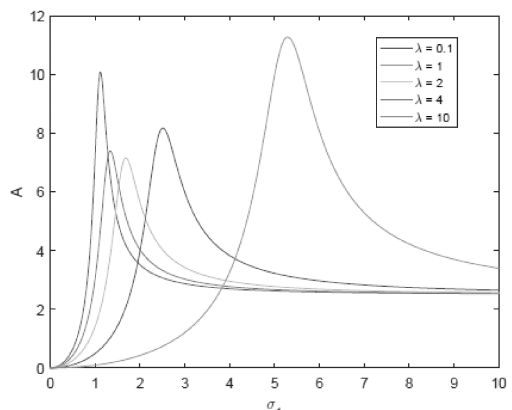


图 6 振幅关于双态噪声强度的变化  
Fig. 6 Amplitude vs strength of noise

参考文献:

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance [J]. J Phys A Math Theor, 2004, 14: L453.  
 [2] 章惠全. 关于随机共振及双稳态系统在信号检测中作用的研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2009.  
 [3] Levin J E, Miller J P. Broadband neural encoding in the cricket cereal sensory system enhanced by stochastic resonance [J]. Nature, 1996, 380: 165.  
 [4] Jia Y, Yu S N, Li J R. Stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise [J]. Phys Rev E, 2000, 62: 1869.  
 [5] Berdichevsky V, Gitterman M. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and addi-

tive noise [J]. Phys Rev E, 1999, 60: 1494.  
 [6] Gitterman M. Harmonic oscillator with fluctuating damping parameter [J]. Phys Rev E, 2004, 69, 041101.  
 [7] 张路, 钟苏川, 彭皓, 等. 乘性二次噪声驱动的线性过阻尼谐振子的随机共振 [J]. 物理学报, 2012, 61, 130503.  
 [8] 田祥友, 冷永刚, 范胜波. 一阶线性系统的调参随机共振研究 [J]. 物理学报, 2013, 62: 95.  
 [9] 王传毅, 任芮彬, 邓科. 周期调制噪声驱动的具质量涨落的欠阻尼谐振子的随机共振 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 1183.  
 [10] 赖莉, 屠浙, 罗懋康. 色噪声环境下系统记忆性对分数阶布朗运动合作输运特性的影响 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 705.

- [11] Gitterman M. Stochastic oscillator with random mass: New type of Brownian motion [J]. *Physica A*, 2014, 395: 11.
- [12] 靳艳飞, 胡海岩. 一类线性阻尼振子的随机共振研究 [J]. *物理学报*, 2009, 58: 2895.
- [13] 林丽烽, 王会琦. 阻尼涨落对线性过阻尼分数阶振子共振的影响 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2014, 51: 1118.
- [14] Ren R B, Luo M K, Deng K. Stochastic resonance in a fractional oscillator driven by multiplicative quadratic noise [J]. *J Stat Mech-Theory E*, 2017: 023210.
- [15] Gitterman M. The noisy oscillator: random mass, frequency, damping [M]. New York: World Scientific Press, 2013.
- [16] Wang J, Cao L, Wo D J. Stochastic multiresonance for periodically modulated noise in a single-mode laser [J]. *Chinese Physics Lett*, 2003, 20: 1217.
- [17] 陈生潭, 郭宝龙, 李学武. 信号与系统 [M]. 3 版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008.
- [18] Shapiro V E, Loginov V M. Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations [J]. *Physica A*, 1978, 91: 563.
- [19] Dykman M I, Luchinsky D G, Mcclintock P V, *et al.* Stochastic resonance for periodically modulated noise intensity [J]. *Phys Rev A*, 1992, 46: R1713.
- [20] 张伟年, 杜正东, 徐冰. 常微分方程. [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.