

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.01.006

帐篷映射的顶点计数公式

杨于宸¹, 陈兴武²

(1. 成都市第七中学, 成都 610041; 2. 四川大学数学学院, 成都 610064)

摘要: 本文讨论了不同参数取值帐篷映射的顶点个数的计算公式. 在此基础上, 本文给出了当参数 $a = 0.5, b = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 时的顶点个数公式, 进而给出了 $b = 1$ 时的 n 周期点个数公式.

关键词: 帐篷映射; 迭代; 顶点; 周期点

中图分类号: O171 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2018)01-0031-06

Count formulas for the vertices of tent map

YANG Yu-Chen¹, CHEN Xing-Wu²

(1. Chengdu No. 7 High School, Chengdu 610064, China; 2. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we focus on the count formulas for the vertices of tent map under iterations. As a special case, we take the parameters $a = 0.5, b = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ and obtain a count formula for the n -period points when $b = 1$.

Keywords: Tent maps; Iteration; Vertex; Periodic point
(2010 MSC 46B20, 39B12)

1 引言

帐篷映射是一类最简单的非线性映射^[1-11]. 其定义如下:

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x, & 0 \leq x < a, \\ \frac{b}{a-1}(x-1), & a \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $0 < a < 1, 0 < b \leq 1$. 如图 1 所示, 点 (a, b) 为映射的顶点. 当 $b=1$ 时, 我们称其为映满的. 关于帐篷映射的周期性, 已有不少结果, 如 Li-Yorke 定理及 Sharkovsky 定理^[1]. 本文研究帐篷映射迭代所产生的顶点个数.

映射 g 的 n 次迭代是指

$$g^n(x) = \overbrace{g(g(\dots g(x)))}^n.$$

上式可以递推地表示为

$$g^0(x) = x, g^n(x) = g(g^{n-1}(x)).$$

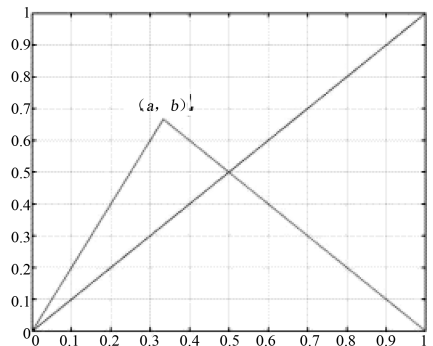


图 1 帐篷映射
Fig. 1 Tent map

收稿日期: 2017-07-09

基金项目: 中学生科技创新后备人才培养计划(“英才计划”)数学学科课题基金(SC-16X09)

作者简介: 杨于宸(2000-), 男, 四川成都人, 主要研究兴趣为动力系统理论. E-mail: yycylxr@126.com

通讯作者: 陈兴武. E-mail: scuxchen@163.com

记 $N(g)$ 为 g 的顶点(非单调点)个数. 本文将给出 $N(f_{(a,b)}^n(x))$ 随 n 增长的变化规律, 进而研究 $f_{(a,b)}^n$ 的周期点个数.

2 顶点个数计数公式

我们首先研究“帐篷撑满”的情形, 此时 $b=1$, 映射如图 2(a). 容易算得

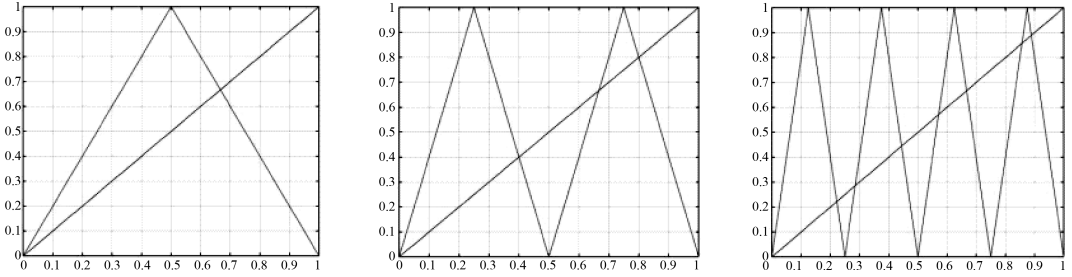


图 2 当 $b=1$ 时帐篷映射的前 3 次迭代: (a) $f_{(a,1)}(x)$; (b) $f_{(a,1)}^2(x)$; (c) $f_{(a,1)}^3(x)$

Fig. 2 The first three iterations of the tent map for $b=1$: (a) $f_{(a,1)}(x)$; (b) $f_{(a,1)}^2(x)$; (c) $f_{(a,1)}^3(x)$

其图像见图 2(b). $f_{(a,1)}^3(x)$ 的计算更为复杂, 我们猜测其图像应该如图 2(c) 所示. 一般地, 我们有

定理 2.1 当 $b=1$ 时,

$$N(f_{(a,1)}^n(x)) = 2^n - 1,$$

其中有 2^{n-1} 个峰, $2^{n-1} - 1$ 个谷, 且这些顶点对半分分布在直线 $x=a$ 的左右两侧.

证明 数学归纳法. 当 $b=1$ 时, 式(1)变为

$$f_{(a,1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x, & 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{a-1}(x-1), & a \leq x \leq 1. \end{cases}$$

该函数由两个单调函数组成, 每个单调函数的值域均为 $[0, 1]$. 令

$$f_1(x) := \frac{x}{a}, \quad f_2(x) := \frac{x-1}{a-1},$$

其定义域分别为 $[0, a]$ 和 $[a, 1]$. 当 $n=2$ 时, 易计算得

$$f_{(a,1)}^2(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2}, & 0 \leq x < a^2, \\ \frac{1}{a-1} \left(\frac{x}{a-1} \right), & a^2 \leq x < a, \\ \frac{1}{a-1} \left(\frac{x}{a-1} - 1 \right), & a^2 \leq x < a, \\ \frac{x-1}{a(a-1)}, & a^2 \leq x < a. \end{cases}$$

从而 $f_{(a,1)}^2(x)$ 由 4 个单调函数组成, $N(f_{(a,1)}^3(x)) = 3$. 这 3 个顶点分别位于直线 $x=a$ 的左右两边, 有 2 个峰和 1 个谷.

$$f_{(a,1)}^2(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2}, & 0 \leq x < a^2, \\ \frac{1}{a-1} \left(\frac{x}{a-1} \right), & a^2 \leq x < a, \\ \left[\left(\frac{x-1}{a-1} \right) - 1 \right] \left(\frac{1}{a-1} \right), & a \leq x < (a^2 - a + 1), \\ \frac{(x-1)}{a(a-1)}, & (a^2 - a + 1) \leq x \leq 1, \end{cases}$$

假设 $n=k$ 时命题真. 则 $2^k - 1$ 个顶点对半分分布在直线 $x=a$ 的左右两边, 其纵坐标均为 1. 我们记 $f_{(a,1)}^k(x)$ 为

$$f_{(a,1)}^k(x) = \begin{cases} h_1(x), & 0 \leq x < x_1, \\ h_2(x), & x_1 \leq x < x_2, \\ \dots\dots \\ h_{2^k}(x), & x_{2^k-1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

这里所有 $h_i(x)$ 都是一次函数, 且当 i 为奇数时 $h_i(x)$ 是单调递增函数, 当 i 为偶数时, $h_i(x)$ 是单调递减函数. 所以 $f_{(a,1)}^k(x)$ 的 $2^k - 1$ 个顶点恰好为 $h_i(x) (i=1, 2, \dots, 2^k - 1)$ 的位置, 且其中有 2^{k-1} 个峰, $2^{k-1} - 1$ 个谷.

当 $n=k+1$ 时, 有

$$f_{(a,1)}^{k+1}(x) = \begin{cases} f_1(h_1(x)), & 0 \leq x < h_1^{-1}(a), \\ f_2(h_1(x)), & h_1^{-1}(a) \leq x < x_1, \\ f_2(h_2(x)), & x_1 \leq x < h_2^{-1}(a), \\ f_1(h_2(x)), & h_2^{-1}(a) \leq x < x_2, \\ \dots\dots \\ f_1(h_{2^k-1}(x)), & x_{2^k-2} \leq x < h_{2^k-1}^{-1}(a), \\ f_2(h_{2^k-1}(x)), & h_{2^k-1}^{-1}(a) \leq x < x_{2^k-1}, \\ f_2(h_{2^k}(x)), & x_{2^k-1} \leq x < h_{2^k}^{-1}(a), \\ f_1(h_{2^k}(x)), & h_{2^k}^{-1}(a) \leq x \leq 1. \end{cases}$$

可见 $f_{(a,1)}^{k+1}(x)$ 由 2^{k+1} 个单调函数组成, 并且在 $h_i^{-1}(a)$ 的取值均为 1, $i=1, 2, \dots, 2^k$. 从而 $f_{(a,1)}^{k+1}(x)$ 有 $2^{k+1} - 1$ 个顶点, 其中有 2^k 个峰, $2^k - 1$ 个谷, 这

$2^{k+1} - 1$ 个顶点对半分布在直线 $x = a$ 的左右两边. 证毕.

由定义, f 的不动点 x 满足 $f(x) = x$. 它相当于函数 f 的图像与对角线 $y = x$ 的交点. 当 f 的图像整体位于对角线以下, 即 $b < a$ 时, f 仅有一个不动点 $x = 0$, 这时 f 的迭代应该是最简单的情况. 下面我们给出当 $b \leq a$ 时的结果.

定理 2.2 当 $b \leq a$ 时 $N(f_{(a,b)}^n(x)) = 1$, 顶点位置为 $(a, b(\frac{b}{a})^{n-1})$.

证明 为了证明定理 2.2, 我们首先假设 $b \leq a$, 即 $f_{(a,b)}^n(x)$ 的顶点位于对角线中或对角线下方. 直接计算可得

$$f_{(a,b)}^n(x) = \begin{cases} \frac{b^n}{a^n}x, & 0 \leq x < a, \\ \frac{b^n}{a^{n-1}(a-1)}(x-1), & a \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

由式(2)中 $f_{(a,b)}^n(x)$ 的表达式可知, 对任意的正整数 n , $f_{(a,b)}^n(x)$ 的顶点个数恒为 1, 位置为 $(a, b(\frac{b}{a})^{n-1})$. 证毕.

$b > a$ 的情形更加复杂. 由定理 2.1 和 2.2 知, 当 n 趋于无穷时, 在撑满的情况下 $N(f_{(a,b)}^n(x))$ 趋于无穷, 而当位于对角线以下时 $N(f_{(a,b)}^n(x))$ 恒为 1. 我们希望知道在 $b > a$ 情形下, $N(f_{(a,b)}^n(x))$ 当 n 趋于无穷时是否大于 1 而又有限.

对一般连续函数 g 而言, 由文献[2,3]可知,
(i) $N(g) \leq N(g^2) \leq \dots \leq N(g^n) \leq \dots$;
(ii) 如果 $N(g^m) = N(g^{m+1})$ 那么对任意正整数 k , 我们有 $N(g^m) = N(g^{m+k})$.

我们用 $H(g)$ 来记上述最小的 m , 并称之为 g 的高度. 一个函数的高度是描述它非单调程度的一个重要指标. 对帐篷映射 f 我们给出如下结果:

定理 2.3 当 $b \leq a$ 时, $H(f) = 1$; 否则 $H(f) = \infty$.

证明 当 $b \leq a$ 时, 由定理 2.1 的后半部分可知, $f_{(a,b)}^n(x)$ 的顶点个数恒为 1, 即 $f_{(a,b)}^n(x)$ 的非单调个数不会随迭代次数的增加而增加, 也即 $H(f) = 1$.

当 $b > a$ 时, 我们有

$$\frac{b}{a} > 1 \Rightarrow 1 < \frac{b}{a} < \left(\frac{b}{a}\right)^2 < \dots < \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

考虑 $f_{(a,b)}^n(x)$ 的 k 次迭代的第一段解析表达式, 我们得到

$$f_{(a,b)}^k(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^k x, x \in \left[0, \frac{a^k}{b^{k-1}}\right)$$

且 $f_{(a,b)}^k(x) \in [0, b]$. 由连续函数的介值定理知存在 $\xi \in \left(0, \frac{a^k}{b^{k-1}}\right)$, 使得 $f_{(a,b)}^k(\xi) = a$.

进一步, 我们有 $f_{(a,b)}^{k+1}(\xi) = b$. 也就是说, 每迭代一次, 非单调点个数至少增加一个, 即不存在某个正整数 i , 使得 $N(f^i) = N(f^{i+1})$. 因此 $f_{(a,b)}^n(x)$ 为升级的. $H(f) = \infty$. 定理得证.

定理 2.3 表明, 对帐篷映射 f 来说, 顶点个数 $N(f_{(a,b)}^n(x))$ 要么恒为 1, 要么趋于无穷, 没有大于 1 而保持有限的可能.

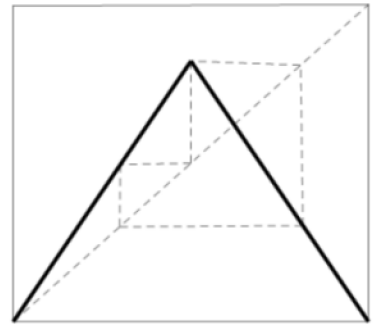


图 3 $a=0.5, b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 时的 $f^3(x)$

Fig. 3 $f^3(x)$ when $a=0.5, b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

当 $b < 1$ 时, 由文献[4]可知, $a=0.5, b=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 时, $f_{0.5, \frac{1+\sqrt{5}}{4}}^3(x)$ 恰好有 3-周期点. 下面我们将以 $f_{0.5, \frac{1+\sqrt{5}}{4}}^n(x)$ (以下简称为 $f^n(x)$) 为例讨论顶点的个数. $f^3(x)$ 的图像如图 3 所示, 且有 $f^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

引理 2.4 设 $S = \{x \in [0, 1] \mid \text{存在整数 } 1 \leq k \leq n, \text{ 使得 } f^k(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\}$ 是 f^n 的顶点集.

证明 点 x 是 $f^n(x)$ 的顶点等价于 $f^n(x)$ 在点 x 处的导数不存在. 而

$$(f^n)'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (f')'(f^i(x))$$

等价于存在整数 $0 \leq i \leq n-1$ 使得 $f^i(x) = 1/2$, 即 $f^{i+1}(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

引理 2.5 若点 x 是 $f(x)$ 的顶点, 对任意 $m \in \mathbf{N}, m > n, x$ 也是 $f^m(x)$ 的顶点.

由引理 2.4 我们知道, 考查顶点等价于考察 $1/2$ 的原像. 记

$\Sigma = \{S = (S_1, S_2, \dots, S_k) \mid k \in \mathbf{N}, S_i = 1 \text{ 或 } 2\}$.
 定义 a_1 代表 $1/2$ 两原像中左边的那个; a_2 代表右边的那个, 如图 4 所示. 对 $S \in \Sigma, S = (S_1, \dots, S_k) \in \Sigma$, 递归定义 a_s . 令 $T = (S_1, S_2, \dots, S_{k-1})$, 如果 a_T 没有定义或 a_T 没有原像, 则 a_s 没定义, 否则若 a_T 有两个相异的原像, 则:

(1) a_{T1} 代表比 $1/2$ 小的那一个原像;

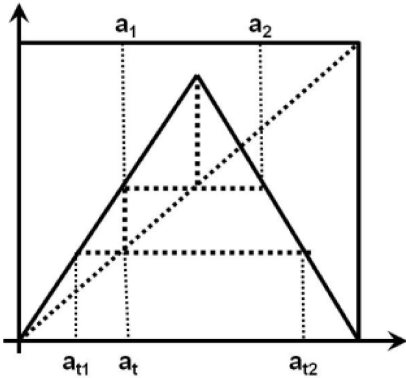


图 4 a_t 的原像
 Fig. 4 Preimage of a_t

(2) a_{T2} 代表比 $1/2$ 大的那一个原像.

特别地, 当 $a_T = b$ 时, 该顶点为 3-周期点. 为了避免叙述的麻烦, 我们在讨论中先不计其个数, 最后再将个数加上(由文献[4]可知 $f^3(x)$ 有 3 个 3-周期点).

记 $P = \{S \mid a_s \text{ 存在 } S \in \Sigma, k \leq n\}$, 那么 $|\Sigma| = |P| + 1$ (这个 1 指原像的顶点), 也就是说, $|P|$ 为每次迭代后顶点的增长率.

引理 2.6 任取 $S = (S_1, S_2, \dots, S_k), k \in \mathbf{N}, k \geq 3, S_i = 1 \text{ 或 } 2, a_s$ 存在当且仅当中 S 不含有 $(1, 1, 2, 1)$ 和 $(1, 1, 2, 2)$ 的排列.

证明 引理等价于证明 S 中含有 $(1, 1, 2, 1)$ 或 $(1, 1, 2, 2)$, 又等价于 a_s 不存在.

令 $S = (r, 1, 1, 2, t)$. 则 a_{r1} 若不存在 $\Leftrightarrow a_s$ 不存在; a_{r1} 若存在则 $a_{r1} < \frac{1}{2}$ 则 $a_{r11} < \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 则 $a_{r112} > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. 因为 $a_{r112} > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 所以 a_{r112} 没有原像, a_s 不存在. 这等价于证明 S 中含有 $(1, 1, 2, 1)$ 或 $(1, 1, 2, 2)$ 的组合.

记 $S_{(j)} = (S_1, S_2, \dots, S_j)$. 令 j 是使 $a_{S_{(j)}}$ 存在的最大的数. 则 $a_{S_{(j+1)}}$ 不存在. 那么 $a_{S_1 S_2 \dots S_j} > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. 从而 $S_j = 2$. 从而 $a_{S_1 S_2 \dots S_{j-1}} < \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. 从而 $S_{j-1} = 1$. 从

而 $a_{S_1 S_2 \dots S_{j-2}} < \frac{1}{2}$. 从而 $S_{j-2} = 1$. 则 $(S_{j-2}, S_{j-1}, S_j, S_{j+1})$ 形如 $(1, 1, 2, 2)$ 或 $(1, 1, 2, 1)$.

记

$$\Sigma(k) = \{S = (S_0, S_1, \dots, S_k) \mid S_i = 1 \text{ 或 } 2, a_s \text{ 存在}\}.$$

引理 2.7 $f^n(x)$ 的顶点个数为 $|\Sigma| = |P| + 1 = \sum_{i=1}^n |\Sigma(i)| + 1$.

证明 由引理 2.6, 可以将 $\Sigma(k)$ 中的元素分为以下几类 ($k \geq 3$):

- (1) $S_k = 2, S_{k-1} = 2$ 或 $S_k = 2, S_{k-1} = 1, S_{k-2} = 2$, 记为 $\Sigma_0(k)$;
- (2) $S_k = 1, S_{k-1} = 2$, 记为 $\Sigma_1(k)$;
- (3) $S_k = 1, S_{k-1} = 1$, 记为 $\Sigma_2(k)$;
- (4) $S_k = 2, S_{k-1} = 1, S_{k-2} = 1$, 记为 $\Sigma_3(k)$.

从而

$$\begin{aligned} |\Sigma_0(k+1)| &= |\Sigma_0(k)| + |\Sigma_1(k)|, \\ |\Sigma_1(k+1)| &= |\Sigma_0(k)|, \\ |\Sigma_2(k+1)| &= |\Sigma_1(k)| + |\Sigma_2(k)|, \\ |\Sigma_3(k+1)| &= |\Sigma_2(k)|, \\ |\Sigma(k)| &= \sum_{i=0}^3 |\Sigma_i(k)|, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} |\Sigma_0(3)| &= 2, |\Sigma_1(3)| = 1, \\ |\Sigma_2(3)| &= 2, |\Sigma_3(3)| = 1, \end{aligned}$$

而 $|\Sigma_0(k+1)| = |\Sigma_0(k)| + |\Sigma_0(k-1)|$ 是斐波那契数列. 从而解得

$$\begin{aligned} |\Sigma_0(k)| &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right], k \geq 3, \\ |\Sigma_2(k)| &= \sum_{i=3}^{k-2} |\Sigma_0(i)| + 3, \\ k \geq 5 \quad (|\Sigma_2(4)| &= 3). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} |\Sigma(k)| &= |\Sigma_0(k)| + |\Sigma_0(k-1)| + \\ &|\Sigma_0(k-2)| + 2 \left(\sum_{i=3}^{k-3} |\Sigma_0(i)| + 3 \right), k \geq 6, \\ |\Sigma(1)| &= 2, |\Sigma(2)| = 4, |\Sigma(3)| = 6, \\ |\Sigma(4)| &= 10, |\Sigma(5)| = 16. \end{aligned}$$

下证

$$\begin{aligned} |\Sigma(k)| &= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + \\ &\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \Leftrightarrow |\Sigma(k+2)| = \end{aligned}$$

$$|\Sigma(k+1)| + |\Sigma(k)| \quad (k \in \mathbf{N}^+).$$

当 $k < 6$ 时, 直接计算可得.

当 $k \geq 6$ 时, 问题等价于 $|\Sigma(k+2)| = |\Sigma(k+1)| + |\Sigma(k)|$, 又等价于

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k}^{k+2} |\Sigma_0(i)| + 2 \left(\sum_{i=3}^{k-1} |\Sigma_0(i)| + 3 \right) = \\ & \sum_{i=k-1}^{k+1} |\Sigma_0(i)| + 2 \left(\sum_{i=3}^{k-2} |\Sigma_0(i)| + 3 \right) + \\ & \sum_{i=k-2}^k |\Sigma_0(i)| + 2 \left(\sum_{i=3}^{k-3} |\Sigma_0(i)| + 3 \right). \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+2} |\Sigma_0(i)| &= \sum_{i=k-1}^{k+1} |\Sigma_0(i)| + \\ & \sum_{i=k-2}^k |\Sigma_0(i)| \Leftrightarrow \sum_{i=3}^{k-1} |\Sigma_0(i)| + 3 = \\ & \sum_{i=3}^{k-2} |\Sigma_0(i)| + \sum_{i=3}^{k-3} |\Sigma_0(i)| + 6 \Leftrightarrow \\ & \Sigma_0(4) + \Sigma_0(5) = \Sigma_0(3) + 6 \Leftrightarrow 3 + 5 = \\ & 2 + 6 = 8, \end{aligned}$$

则 $|\Sigma(k+2)| = |\Sigma(k+1)| + |\Sigma(k)|$. 易得

$$\begin{aligned} |\Sigma(k)| &= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + \\ & \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \quad (k \in \mathbf{N}^+). \end{aligned}$$

由引理 2.4, f^n 的顶点个数 $|S| = |P| + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} |\Sigma(i)| + 1, (n \geq 2)$. 显然, 当 $n = 1$ 时, $|P| = 0, |S| = 1$. 故

$$N(f^n(x)) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ |P| + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} |\Sigma(i)| + 1, & n \geq 2. \end{cases}$$

证毕.

3 对周期点的讨论

定理 3.1 当 $b \leq a$ 时, $f_{(a,b)}^n(x)$ 没有周期点. 对于任意质数 n , 当 $b = 1$ 时, $f_{(a,b)}^n(x)$ 有 $2^n - 2$ 个 n 周期点.

证明 由定理 2.1 可知, 当 $a \geq b$ 时, $f_{(a,b)}^n(x)$ 的三次迭代函数的图像与第一象限的对角线仅有 1 个交点, 而这 1 个交点是 $f_{(a,b)}^n(x)$ 的不动点. 从而 $f_{(a,b)}^n(x)$ 没有周期点.

当 $b = 1$ 时, 由定理 2.1, 可知 $f_{(a,b)}^n(x)$ 的解析式个数为 2^n . 令 $g(x) = f_{(a,b)}^n(x) - x$. 则 $g(x)$ 的解析式为

$$g(x) = \begin{cases} h_1(x) - x, & 0 \leq x < x_1, \\ h_2(x) - x, & x_1 \leq x < x_2, \\ \dots\dots \\ h_{2^n}(x) - x, & x_{2^n-1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

则对任意 $i = 0, \dots, 2^k - 1, g(x_i)g(x_{i+1}) < 0$, 其中 $x_0 = 0, x_{2^n} = 1$. 由连续函数的介值定理^[5]知, 该函数有 2^n 个零点. 这说明 $f_{(a,b)}^n(x)$ 的函数图像与第一象限的对角线有 2^n 个交点, 其中 2 个交点是 $f_{(a,b)}^n(x)$ 的不动点, 另外 $2^n - 2$ 个交点为其 n 周期点. 又由 Fermat 小定理得 $\frac{2^n - 2}{n} \in \mathbf{N}^+$. 故这 $2^n - 2$ 个交点组成 $\frac{2^n - 2}{n}$ 个 n 周期轨道. 从而 $f_{(a,b)}^n(x)$ 有 $2^n - 2$ 个 n 周期点.

引理 3.2 (容斥原理)^[6] 设 S 是有限集合, Q_1, Q_2, \dots, Q_m 是同集合 S 有关的 m 个性质. 设 A_i 是 S 中具有性质 Q_i 的元素构成的集合 ($1 \leq i \leq m$). \bar{A}_i 是 S 中不具有性质 Q_i 的元素构成的集合 ($1 \leq i \leq m$), 则 S 中不具有性质 Q_1, Q_2, \dots, Q_m 的元素个数为:

$$\begin{aligned} & |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m| = \\ & |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1,2,\dots,m \text{ 的 } 2 \text{ 组合}} |A_i \cap A_j| - \\ & \sum_{1,2,\dots,m \text{ 的 } 3 \text{ 组合}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ & + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|. \end{aligned}$$

将 n 的正因子从小到大排列的集合 A_n , 依次编号为 $a_1, a_2, \dots, a_{\tau(n)}$, 其中 $\tau(n)$ 为 n 的正约数个数. 显然 $a_1 = 1, a_{\tau(n)} = n$.

定理 3.3 $|N_{a_{\tau(n)}}| = 2^n - \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} |N_{a_i}|, i = 1, 2, \dots, \tau(n) - 1$, 其中 N 为 $a_{\tau(n)}$ -周期点集.

证明 因为 $a_i | a_{\tau(n)} (i = 1, 2, \dots, \tau(n) - 1)$, 所以对任意 $N_{a_i} (i = 1, 2, \dots, \tau(n) - 1)$, 有 $N_{a_i} \subseteq f^n(x)$ 且 $N_{a_i} \subseteq \mu(x) = x$. 由于 $f^n(x) = x$ 有 2^n 个根. 则 $|N_{a_{\tau(n)}}| = 2^n - \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} |N_{a_i}|$.

定理 3.4 对任意具有形式 $n = P_1 P_2 \dots P_k$, 这里 P_i 为质数的正整数, 当 $b = 1$ 时, $f_{(a,1)}^n(x)$ 的 n 周期点个数为

$$\begin{aligned} |N| &= 2^n - \sum_{i=1}^n 2^{P_i} + \sum_{1,2,\dots,m \text{ 的 } 2 \text{ 组合}} 2^{P_i P_j} - \\ & \sum_{1,2,\dots,m \text{ 的 } 3 \text{ 组合}} 2^{P_i P_j P_k} + \dots + (-1)^k \cdot 2. \end{aligned}$$

证明 令 S 为 $[0, 1]$ 上使得 $f_{(a,1)}^n(x) = x$ 成立的点的集合. 由定理 3.1 知 $|S| = 2^n$.

设 A_i 为 $[0, 1]$ 上使得 $f_{(a,1)}^{P_i}(x) = x$ 成立的点

的集合. 综合定理 3.2 可得 $N \subset \overline{A_i} (\overline{A_i} = S - A_i)$. 则 $N \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$, 且对 $\cap \overline{A_i}$ 中任意点 x , 都有 n 是使 $f_{(a,1)}^k(x) = x$ 成立的最小正整数. 不然, 若有 $f_{(a,1)}^t(x) = x$, 则 $t|n, t| \frac{n}{P_j}$, 则必有 A_j 使得 $x \in A_j$. 矛盾. 所以 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \subset N$ 成立. 从而 $N = \cap \overline{A_i}$. 由引理 3.2 得

$$|N| = |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1, \dots, m \text{ 的 2 组合}} |A_i \cap A_j| - \sum_{1, \dots, m \text{ 的 3 组合}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^m |A_1 \cap \dots \cap A_m| = 2^n - \sum_{i=1}^n 2^{\frac{n}{P_i}} + \sum_{1, \dots, m \text{ 的 2 组合}} 2^{\frac{n}{P_i P_j}} - \sum_{1, \dots, m \text{ 的 3 组合}} 2^{\frac{n}{P_i P_j P_k}} + \dots + (-1)^k \cdot 2.$$

证毕.

定理 3.5 对任意形如 $n = P_1^{\alpha_1}$ 的正整数 n, P_1 为质数, 当 $b = 1$ 时, $f(x)$ 有 $|N|$ 个 n 周期点, $|N| = 2^n - 2^{\frac{n}{P_1}}$.

证明 数学归纳法. 当 $S_1 = 1$ 时, 由定理 3.1 知 $|N| = 2^n - 2 = 2^n$ 成立.

当 $S_1 = 2$ 时, 由定理 3.2 知 $|N_{a_{\tau(n)}}| = 2^n + \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} |N_{a_i}|$. 注意到此时 $\tau(n) = 3, a_1 = 1, a_2 = P_1, a_3 = P_1^2$, 则

$$|N| = 2^n - (|N_{a_1}| + |N_{a_2}|) = 2^n - (2 + 2^{P_1} - 2) = 2^n - 2^{P_1} = 2^n - 2^{\frac{n}{P_1}}.$$

令 $S_1 = t$ 时命题成立. 则当 $S_1 = t + 1$ 时,

$$|N_{a_{\tau(n)}}| = 2^n + \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} |N_{a_i}|.$$

此时 $\tau(n) = t + 2, a_1 = 1, a_2 = P_1, a_3 = P_1^2, \dots, a_{t+1} = \frac{n}{P_1}, a_{t+2} = n$.

$$|N| = 2^n - (|N_{a_1}| + |N_{a_2}| + \dots + |N_{a_{\tau(n)-1}}|) = 2^n - (2 + 2^{P_1} - 2 + 2^{P_1^2} - 2^{P_1} + \dots + 2^{P_1^t} - 2^{P_1^{t-1}}) = 2^n - 2^{P_1} = 2^n - 2^{\frac{n}{P_1}}.$$

则 $|N| = 2^n - 2^{\frac{n}{P_1}}$. 证毕.

定理 3.6 对任意具有形式: $n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$, P_i 为质数的正整数 n , 当 $b = 1$ 时, $f_{(a,1)}^n(x)$ 的 n 周期点个数为

$$|N| = 2^n - \sum_{i=1}^n 2^{\frac{n}{P_i}} + \sum_{1, 2, \dots, m \text{ 的 2 组合}} 2^{\frac{n}{P_i P_j}} - \sum_{1, 2, \dots, m \text{ 的 3 组合}} 2^{\frac{n}{P_i P_j P_k}} + \dots + (-1)^k \cdot 2^{\frac{n}{P_1 P_2 \dots P_k}}.$$

证明 记 S 为 $[0, 1]$ 上使得 $f_{(a,1)}^n(x) = x$ 成立

的点的集合, A_i 为 $[0, 1]$ 上使得 $f_{(a,1)}^{\frac{n}{P_i}}(x) = x$ 成立的点的集合. 同推论 2.3 可得 $N \subset \overline{A_i} (\overline{A_i} = S - A_i)$. 则 $N \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$ 且对 $\cap \overline{A_i}$ 中任意点 x , 都有 n 是使 $f_{(a,1)}^k(x) = x$ 成立的最小正整数. 不然若有 $f_{(a,1)}^t(x) = x$. 则 $t|n, t| \frac{n}{P_j}$. 则必有 A_j 使得 $x \in A_j$. 矛盾. 所以 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \subset N$ 成立. 从而 $N = \cap \overline{A_i}$. 进而由引理 3.2 得

$$|N| = |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1, \dots, m \text{ 的 2 组合}} |A_i \cap A_j| - \sum_{1, \dots, m \text{ 的 3 组合}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^m |A_1 \cap \dots \cap A_m| = 2^n - \sum_{i=1}^n 2^{\frac{n}{P_i}} + \sum_{1, \dots, m \text{ 的 2 组合}} 2^{\frac{n}{P_i P_j}} - \sum_{1, \dots, m \text{ 的 3 组合}} 2^{\frac{n}{P_i P_j P_k}} + \dots + (-1)^k \cdot 2^{\frac{n}{P_1 P_2 \dots P_k}}.$$

证毕.

参考文献:

[1] 钟云霄. 混沌与分形浅谈[M]. 北京: 北京大学出版社, 2010.
 [2] Zhang W. PM functions, their characteristic intervals and iterative roots [J]. Ann Pol Math, 1997, 65: 119.
 [3] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 上海: 高等教育出版社, 2007.
 [4] 许胤龙. 组合数学引论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.
 [5] 张景中, 杨路. 论逐段单调连续函数的迭代根[J]. 数学学报, 1983, 26: 398.
 [6] Lagarias J C, Porta H A, Stolarsky K B. Asymmetric tent map expansions II, purely periodic points [J]. Illinois J Math, 1994, 38: 574.
 [7] Sprows D. Periodic points for the tent function [J]. Coll Math J, 2004, 35: 133.
 [8] Hassan Ai-shameri W F, Mahiub M A. Some dynamical properties of the family of tent maps [J]. Int J Math Anal, 2013, 7: 1433.
 [9] Bani I. Towards the complete classification of generalized tent maps inverse [J]. Topo Appl, 2013, 160: 63.
 [10] Scheicher K, Sirvent V F, Surer P. Dynamical properties of the tent map [J]. J London Math Soc, 2016, 93: 319.
 [11] Yoshida T, Mori H, Shigematsu H. Analytic study of chaos of the tent maps: band structures, power spectra, and critical behaviors [J]. J Stat Phys, 1983, 31: 279.